

--	--

臺北市立大直高級中學

112 學年度第 1 次專任教師甄選

高中數學科 題本

請不要翻到次頁！

讀完本頁的說明，聽從監試委員的指示才開始作答

請閱讀以下測驗作答說明

◎ 測驗說明：

這是數學科題本，題本採雙面印刷。測驗時間 100 分鐘，

作答開始與結束請聽從監試委員的指示。

◎ 作答注意事項：

1. 本試題有兩大題：填充題 11 題、計算證明題 3 大題，共計 100 分。
2. 答案用紙請以黑色或藍色墨水的筆作答。
3. 請先將每一張答案用紙最上方的准考證號碼及姓名填寫完後再作答。
4. 劃記任何不相關記號及以其他顏色筆作答者不予計分。

考試結束，試題本及答案用紙務必繳回，未繳回者以零分計算。

請聽到鈴（鐘）聲響後再翻頁作答

臺北市立大直高級中學 112 學年度第 1 次專任教師甄選 高中數學科試題卷

一、填充題：(每題 6 分，共 66 分)

1. 已知 a, b, c, d 為正數，且滿足 $a + 3b = 1$ 以及 $3c + d = 1$ ，則 $\frac{1}{a} + \frac{1}{bcd}$ 的最小值為_____。

2. 已知兩數列 $\langle a_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 、 $\langle b_n \rangle_{n=1}^{\infty}$ 定義如下： $\begin{cases} a_1 = 20 \\ b_1 = 23 \end{cases}$ 且 $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = 2a_n + 3b_n \end{cases}$ ，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} =$ _____。

3. 不等式 $|x| + |y| + |x - y| \leq 10$ 的解集合，在坐標平面上對應的區域面積為_____。

4. 教室裡有左右兩塊黑板，在左邊黑板上寫下數字 100 並進行以下操作：
- (1) 每次把左邊黑板上一個大於 1 的正整數 k 擦掉，並換成兩個較小的正整數 a 、 b ，使得 $a+b=k$ 。
 - (2) 把乘積 $a \times b$ 寫在右邊黑板上。

重複這樣的操作，直到左邊黑板上的數字全都是 1 則停止操作。

此時，左邊黑板上共有 x 個數字 1，右邊黑板的數字總和最大值為 y ，則數對 (x, y) 為_____。

5. 甲乙兩人猜拳。假設每次甲猜贏的機率為 $\frac{1}{2}$ 、猜輸的機率為 $\frac{1}{3}$ 、平手的機率為 $\frac{1}{6}$ 。

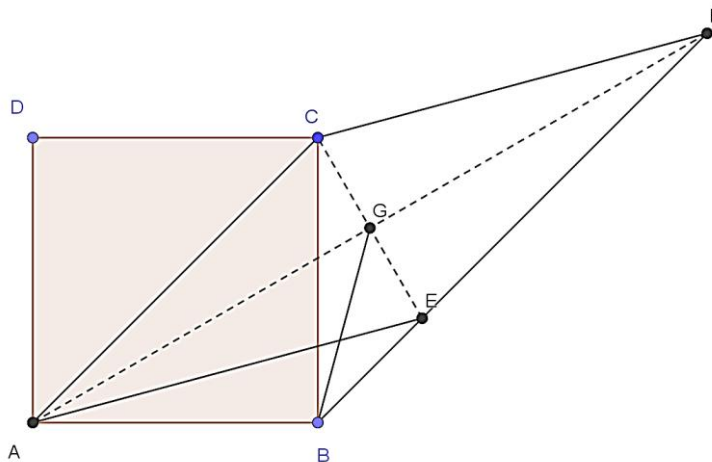
若規定每回合必須猜到有人猜贏為止，先連續贏兩回合者獲勝，則甲獲勝的機率為_____。

6. 若四邊形 $ABCD$ 中， $\overline{AB}=8$ 、 $\overline{BC}=15$ 、 $\overline{CD}=17$ 、 $\overline{DA}=10$ ，

則四邊形 $ABCD$ 的內切圓面積最大值為_____。

7. 空間中有兩條歪斜線 L 與 S ，直線 L 上有三點 A 、 B 、 C ，且 $\overline{AB} = \overline{BC}$ 。
 直線 S 上有三點 D 、 E 、 F ，其中 $\overline{AD}$ 、 $\overline{BE}$ 、 $\overline{CF}$ 皆垂直 L 。
 已知 $\overline{AD} = 10$ 、 $\overline{BE} = 13$ 、 $\overline{CF} = 24$ ，則歪斜線 L 、 S 的距離為_____。

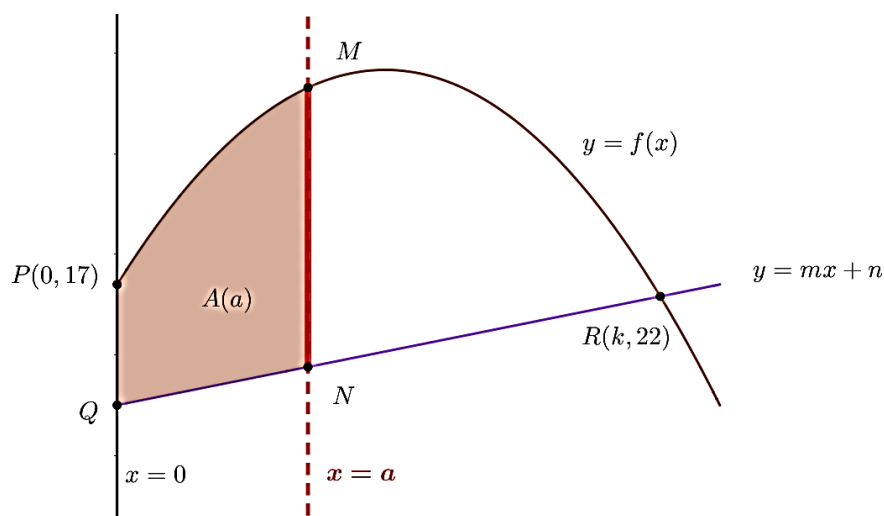
8. 如右圖， $ABCD$ 為正方形，
 直線 BF 平行直線 AC ，
 E 在 BF 上使得 $AEFC$ 為菱形。
 若 G 為菱形對角線交點，
 則 $\tan \angle CBG =$ _____。



9. 已知 H 為 $\triangle ABC$ 的垂心。若 $\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HB} + 3\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{0}$ ，則 $\cos A =$ _____。

10. 已知 F 為橢圓 $\Gamma: \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{23} = 1$ 在下半平面的焦點， C 為 Γ 的最大內切圓。在橢圓 Γ 上取一點 P ，且 P 在上半平面，過 P 點對圓 C 作切線，令切點為 Q ，則 $\overline{PF} - \overline{PQ} =$ _____。

11. 一個由多項式函數 $y = f(x)$ 與函數 $y = mx + n$ 、 $x = 0$ 、 $x = a$ ($0 \leq a \leq k$) 所圍出的封閉區域，其面積函數為 $A(a) = -a^3 + 7a^2 + 5a$ ，如下圖。已知 $P(0, 17)$ ， Q 分別為 $x = 0$ 與 $y = f(x)$ 、 $y = mx + n$ 的交點； $R(k, 22)$ 為 $y = f(x)$ 與 $y = mx + n$ 的交點，則多項式 $f(x) =$ _____。



二、計算證明題：(共 34 分)

1. 如果 a 是一個實數，則 $[a]$ 定義為小於等於 a 的最大整數，例如： $[3.4]=3$ 、 $[5]=5$ 、 $[-2.6]=-3$ 。

試求 $f(x) = 2\left[\log \sqrt{x}\right]^2 - \left[\log \frac{10}{x}\right]^2$ 的最大值，及發生最大值時 x 的範圍。(10 分)

2. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, \dots, 2023\}$ 是前 2023 個正整數所構成的集合。

小直從 A 的子集合中任意選取一個(每個 A 的子集合被小直選到的機會均等)，令此子集合為 B 。

定義隨機變數 X 如下：若 B 為非空集合，則 X 為 B 的最大元素；若 B 為空集合，則 $X = 0$ ；

試求 X 的期望值 $E(X)$ 。(10 分)

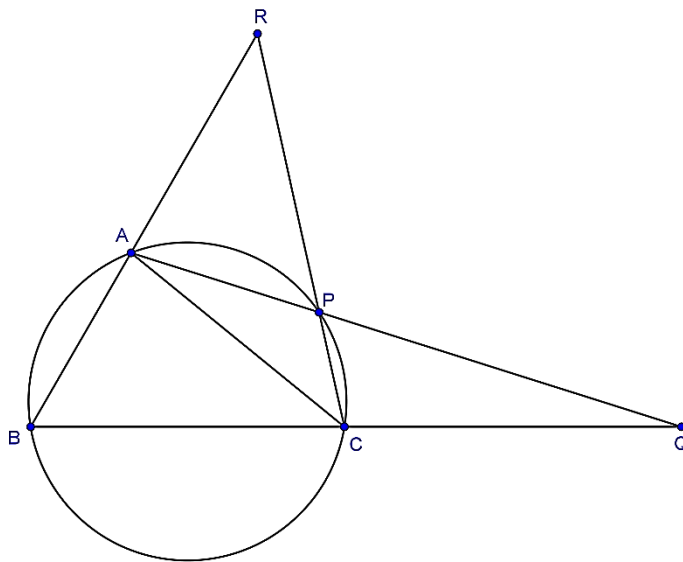
3. 如右圖，作 $\triangle ABC$ 的外接圓， P 為 AC 上一點。

已知射線 AP 與射線 BC 交於一點 Q ；

射線 CP 與射線 BA 交於一點 R 。

(1) 若 $\angle B = 60^\circ$ ，請證明： $\frac{\overline{BA}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BR}} = 1$ 。(7分)

(2) 若 $\frac{\overline{BA}}{\overline{BQ}} + \frac{\overline{BC}}{\overline{BR}} = 1$ ，請證明： $\angle B = 60^\circ$ 。(7分)



《試題結束》

臺北市立大直高級中學 112 學年度第 1 次專任教師甄選

高中數學科試題 填充題參考答案

一、填充題：

1. 49	2. $\frac{1}{2}$	3. 75
4. (100,4950)	5. $\frac{63}{95}$	6. $\frac{816}{25}\pi$
7. $\frac{120}{13}$	8. $2-\sqrt{3}$	9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
10. $\sqrt{23}$	11. $-3x^2+16x+17$	