

國立東石高級中學 112 學年度第一次教師甄選 數學科試題

一、填充題(每格 5 分，共 80 分)

1. 設向量 $\vec{a}_n = (\cos \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{6})$ ，向量 $\vec{b}$ 的長度 $|\vec{b}| = 2$ ，令 $\sum_{n=0}^{10} |\vec{a}_n + \vec{b}|^2$ 的最大值為 S ，最小值為 T ，求數對 $(S, T) =$ _____。
2. 給定一擺線之參數式 $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$ ， θ 為實數，求其擺線圖形在完整一個週期的弧線與 x 軸所圍成封閉區間的面積=_____。
3. 設 $f(a, b) = (a + b - 2)^2 + (a + 2b - 3)^2 + (a + 3b - 5)^2 + (a + 4b - 8)^2$ ，當 $f(a, b)$ 有最小值時，求數對 $(a, b) =$ _____。
4. 設 $a = \cos \frac{\pi}{3}$ ，求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 3 & 2a+1 & a^2+2a & 3a^2 \\ 3 & a+2 & 2a+1 & 3a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 之值=_____。
5. 求不等式 $5 \leq x + y + z \leq 12$ 之非負整數解，共有_____組。
6. 令 a_n 為 $(3 - \sqrt{x})^n$ ，展開式中 x 項的係數，求極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^2}{a_2} + \frac{3^3}{a_3} + \frac{3^4}{a_4} + \cdots + \frac{3^n}{a_n} \right)$ 之值=_____。
7. 設 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，令 $t = \frac{2\sin\theta+1}{3+\cos\theta}$ ，求 t 的範圍=_____。
8. 有一個袋子，裡面裝了 2 顆紅球，3 顆白球，4 顆黃球，5 顆黑球(球的材質、大小都相同)，將袋中的球取出，一次取一顆，取後不放回，求白球先被取完之機率=_____。
9. 給定空間中一個正四面體 $ABCD$ ， E 、 F 、 G 、 H 皆為邊長的分點，其中 $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FA}$ ， $\overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ ， H 為 $\overline{CD}$ 之中點，試求 $\overrightarrow{HF}$ 與 $\overrightarrow{GE}$ 之夾角=_____。
10. 將 $(a - 2b + 3c - 4d)^{20} - (a + 2b - 3c - 4d)^{20}$ 展開後合併整理，最後會有_____種不同類項。
11. 給定空間中一封閉區面 $S: (2x + 3y + z)^2 + (3x - 2y + z)^2 + (x + 3y + 2z)^2 = 1$ ，求所圍出的體積=_____。
12. 試化簡 $\sum_{k=0}^{100} \left(x + \frac{k}{100}\right)^2 \binom{100}{k} x^k (1-x)^{100-k} =$ _____。
13. 當 $x > 0$ ， $y > 0$ 且 $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2y} = 1$ ，試求 $2x + y$ 的最小值=_____。
14. ΔABC 中，設 H 為垂心， O 為外心，已知 $\overrightarrow{AH} = \frac{11}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{12}\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{AO} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(\alpha, \beta) =$ _____。
15. 求 $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} =$ _____。
16. 將 2 顆綠色珠子，4 顆紅色珠子，3 顆藍色珠子串成一個項圈，試求共有幾種不同方法(假設珠子大小一樣) = _____。

二、計算題(需有計算過程)(每題 10 分，共 20 分)

1. 求積分 $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$ _____。
2. 已知遞迴數列滿足， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2a_n-4}$ ，求一般式 $a_n =$ _____。(以 n 表示)

國立東石高中 112 學年度第一次教師甄選 數學科參考答案

一、填充題

1.	$(59, 51)$	2.	3π	3.	$(-\frac{1}{2}, 2)$	4.	$\frac{1}{64}$
5.	420	6.	18	7.	$\frac{3 - \sqrt{33}}{8} \leq t \leq \frac{3 + \sqrt{33}}{8}$		
8.	$\frac{223}{840}$	9.	$\cos^{-1}(\frac{2\sqrt{57}}{19})$	10.	880	11.	$\frac{2\pi}{27}$
12.	$\frac{399x^2 + x}{100}$	13.	$\frac{1}{2} + \sqrt{3}$	14.	$(\frac{2}{15}, \frac{11}{24})$	15.	$\frac{\sqrt{7}}{2}$
16.	73						

二、計算題

1. $3\sqrt{2\pi}$

2. $a_n = \frac{3 \cdot 2^{n+1} + (-5)^n}{2^{n+1} - 2(-5)^n}$