

**Wie heiß ist Strahlung? Essex u. a.  
[2003]  
Mit Ergänzungen für die Atmosphäre**

Christopher Essex  
*Department of Applied Mathematics,  
University of Western Ontario, London,  
Ontario, Canada N6A 5B7*  
mailto:essex@uwo.ca

Dallas C. Kennedy  
*The Math Works, Inc., 3 Apple Hill Drive, Natick,  
Massachusetts 01760*  
mailto:dkennedy@mathworks.com

R. Stephen Berry  
*Department of Chemistry and James Franck Institute,  
University of Chicago, Chicago, Illinois 60637*  
mailto:berry@uchicago.edu

Rohübersetzung und Ergänzungen  
Jochen Ebel

20. Mai 2013

## **Inhaltsverzeichnis**

<b>Vorbemerkung</b>	<b>3</b>
<b>Zusammenfassung</b>	<b>3</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>4</b>
<b>2 Fehlanwendungen der Temperatur außerhalb des Gleichgewichts</b>	<b>5</b>

<b>3 Die Dynamik des Strahlungsfeldes</b>	<b>6</b>
<b>4 Nichtgleichgewichtsthermodynamik</b>	<b>7</b>
4.1 Die Entropie im Allgemeinen . . . . .	7
4.2 Die Gültigkeit der Nichtgleichgewichts-Temperatur . . . . .	8
4.3 Reine Zustände und unendliche Temperatur . . . . .	10
<b>5 Strahlungs-Entropie und Temperatur</b>	<b>11</b>
5.1 Kohärente Zustands Basis – zufällige Feld-Phase . . . . .	11
5.2 Phasenraumreduktion: Photonenzählung . . . . .	12
5.3 Die Temperatur als Lagrange-Multiplikator . . . . .	13
5.4 Temperatur gegenüber Intensität – klassischen Grenzen . . . . .	15
<b>6 Die Temperatur eines realen Lasers</b>	<b>16</b>
<b>7 Andere physikalische Konsequenzen</b>	<b>19</b>
<b>Danksagungen</b>	<b>21</b>
<b>8 Erwärmung und Lebensdauer</b>	<b>25</b>
<b>9 Höldersche Ungleichung</b>	<b>26</b>
<b>10 Erzeugungs- und Vernichtungsoperator ... Wikipedia</b>	<b>28</b>
10.1 Vorbemerkung . . . . .	28
10.2 Definition . . . . .	28
10.2.1 Details . . . . .	29
10.3 Bosonische Kletteroperatoren . . . . .	30
10.3.1 Details . . . . .	30
10.4 Fermionische Kletteroperatoren . . . . .	31
10.4.1 Details . . . . .	31
10.5 Beispiel für bosonische Kletteroperatoren: Harmonischer Oszillator . . . . .	32
10.5.1 Hamiltonoperator umformen . . . . .	32
10.5.2 Eigenschaften der Erzeuger und Vernichter . . . . .	33
10.5.3 Lösung des Eigenwertproblems . . . . .	34
10.5.4 Eigenfunktionen in Ortsdarstellung . . . . .	35
10.6 Matrixdarstellung bosonischer Kletteroperatoren . . . . .	35
10.6.1 Erzeugungsoperator . . . . .	36
10.6.2 Vernichtungsoperator . . . . .	36
10.6.3 Besetzungszahloperator . . . . .	37
10.7 Eigenzustände bosonischer Kletteroperatoren . . . . .	37
10.8 Literatur . . . . .	38
10.9 Siehe auch . . . . .	38
10.10 Urheberrecht . . . . .	38
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>39</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>39</b>
<b>Literaturverzeichniss</b>	<b>39</b>

## Vorbemerkung

Die Übersetzung ist eine bearbeitete und ergänzte maschinelle Rohübersetzung. Die Ergänzungen sind in blau, die Übersetzung des Originalartikels in schwarz.

Die Temperaturen in der Atmosphäre sind nicht einheitlich. Deshalb sind Betrachtungen zu den Wärmeübergängen bei uneinheitlicher Temperatur hilfreich. Auf klassischen Wege existieren diese Kenntnisse schon seit dem 19. Jahrhundert Stefan [1879], Wien [1894]. In der vorliegenden Arbeit ist über den Rechenweg der Quantentheorie die Richtigkeit dieser alten Kenntnisse bestätigt. Obwohl das Hauptaugenmerk auf die Laser gerichtet ist, sind alle Bereiche abgedeckt. Auf Seite 20 ist nachgewiesen, daß auch im Nichtgleichgewichtsfall der II. HS der TD (Entropie) erfüllt ist. Der Bogen ist auch zur elektromagnetischen Hochfrequenztechnik (z.B. Antennen, Seite 21) gezogen, die z.B. für Handyverbindungen wesentlich ist und wo keine Verbindung von kälteren zum wärmeren Handy möglich wäre, wenn die Gegenstrahlung dem II. HS der TD widersprechen würde. Indirekt ist auch die Speisenerwärmung mit Mikrowellenstrahlung ("niedrige Frequenzen" - Seite 15) angesprochen.

Es wird nicht der Wärmeübergang zwischen zwei Körpern betrachtet, sondern nur die Wechselwirkung Strahlungsfeld Materie. Zwar ist implizit beim Wärmeübergang durch Strahlung zwischen zwei Körpern auch das Strahlungsfeld vorhanden, wird aber nicht explizit untersucht. Diese Unterschiede der Wärmeübergänge sind auf Seite 20 genannt. Zu beachten ist allerdings immer, daß auf der Erde nur die stationären Verhältnisse von Bedeutung sind: Weil ein Teil der Wärme von der Oberfläche nicht über Strahlung abgeführt wird, sondern über Konvektion (sensible und latente Wärme) sind die lokalen Temperaturen von Strahlungsfeld und Materie nicht gleich (Seite 20) - allerdings muß das Gesamtstrahlungsfeld betrachtet werden, wozu an der Erdoberfläche die Summe von Einstrahlung (Solarstrahlung - Strahlungstemperatur > Oberflächentemperatur - und Gegenstrahlung - Strahlungstemperatur < Oberflächentemperatur) und Ausstrahlung der Erdoberfläche gehören.

Nicht Gegenstand der Untersuchung der Autoren war der Zeitbedarf des Geschehens, das wurde im Abschnitt 8 auf Seite 25 ergänzt. Um Alles abzurunden, wurde die Betrachtung noch mit der Hölderschen Ungleichung ergänzt.

Ich halte einen Großteil des Textes für Personen, die wenig oder nicht mit dem Formalismus der Quantentheorie vertraut sind, für schwer lesbar - auch wenn der Text nach der Computerübersetzung noch stilistisch überarbeitet ist. In der Wikipedia bemüht man sich, die Artikel möglichst leicht lesbar zu machen. Um die Leseproblematik zu zeigen und den Leser, denen die Schreibweise der Quantenmechanik vielleicht nicht so vertraut ist, mit der Schreibweise bekannt zu machen, ist der Wikipedia-Artikel (Abschnitt 10 auf Seite 28) zu den Operatoren angefügt.

## Zusammenfassung

Ein in sich schlüssige Konzept zur Nichtgleichgewichts-Strahlungstemperatur wird eingeführt, mit der Verteilung der Energie über die Zustände. Wir beginnen rigoros mit Ensembles von Hilbert-Räumen und enden mit Beispielen aus der Praxis, die vor allem basieren auf Lasern, deren Strahlung weit vom Gleichgewicht entfernt ist. Wir zeigen, dass bei Lasern die Strahlungstemperaturen sehr hoch, aber nicht unendlich sind und von Intensität und Frequenz abhängen. Heuristische "Temperaturen", abgeleitet von einer fehlerhaften Anwendung

der Gleichgewichts-Argumente sind nachweislich falsch. Weitere allgemeine Bedingungen für die Gültigkeit der Nichtgleichgewichts Temperaturen sind ebenfalls etabliert.

Original: 26. August 2002

Final: 8. Juni 2003

in **American Journal of Physics** veröffentlicht

Vol. 71, Nr. 10, Oktober 2003, pp. 969-978

PACS-Nummern: 05.70.Ln, 42.50.-p, 42.50.Ar, 42.55.Ah

## 1 Einleitung

Es scheint, daß für die Standard-Definitionen intensiver thermodynamischer Parameter, wie der Temperatur, für ein betrachtetes System verlangen, daß sich das System im thermodynamischen Gleichgewicht befindet. In diesem Paper untersuchen wir die Entropie und Temperatur der Strahlung außerhalb des Gleichgewichts und zeigen, dass innerhalb begrenzter Beschränkungen, die kein Gleichgewicht erfordern, die Strahlungstemperatur wohldefiniert ist und sich unterscheidet von irgendeiner mit der Materie verbundenen Temperatur oder von plausiblen, aber falsch angewendet Gleichgewichts-Definitionen. Wir verwenden die Laserstrahlung als unser wichtiges Beispiel.

Laser-Strahlung ist ein faszinierendes Beispiel für ein hoch organisiertes Quanten-System der quasi-kohärenten Bosonen<sup>1</sup> M. Sargent III und W. E. Lamb [1974], Silfvast [1996], Mandel und Wolf [1995]. Ein Laserstrahl wird unterstützt durch externes Pumpen, wodurch der Laserstrahl weit entfernt vom thermodynamischen Gleichgewicht gehalten wird. Der Laser teilt diese Eigenschaft mit anderen Steady-State-Systeme, die durch externe Einwirkungen stationär gehalten werden. [Bei der Atmosphäre z.B. durch die Solarstrahlung](#). Wir finden: die Temperatur der Laserstrahlung übertrifft bei weitem die Temperaturen, die der Laserresonators und das Laser-Material des atomaren Übergangs haben,. Eine falsche Zuordnung der Strahlung zu der Materie-Temperatur ([Oberflächentemperatur oder lokalen Atmosphären-temperatur](#)) führt zu fehlerhaften Bestimmung der Temperaturen der Laserstrahlung, die so bis zu zehn Größenordnungen zu klein sind.

Die Photonen-Zahl ist im Gegensatz zur Energie keine konservative Größe. Die Gibbs-Duhem-Beziehung für Strahlung  $SdT - Vdp = 0$ , impliziert, dass man die beiden intensiven thermodynamische Parameter, den Druck  $p$  (Konjugat des Volumen) und die Temperatur  $T$  (Konjugat der Energie) auf einen unabhängigen intensiven Parameter reduzieren kann, wobei üblicherweise  $T$  benutzt wird. Die Features der Strahlungs-Thermodynamik, wie das, das die Photonenruhemasse Null ist und das kein Ruhesystem existiert, macht die Thermodynamik der Strahlung viel einfacher als die der Materie, die eine konstante Teilchenzahl hat und chemisch konservatives Potenzial hat, das nicht Null ist Essex und Kennedy [1999], Reichl [1998]. Dadurch sind [bei Strahlung](#) auch außerhalb des Gleichgewichts generalisierende intensive thermodynamische Parameter viel einfacher zu gewinnen. Deshalb kann für die Strahlung eine Nichtgleichgewichts-Temperatur in einen natürlichen Zusammenhang eingeführt werden.

Eine zweckmäßig definierte Nichtgleichgewichts-Temperatur hat physikalische Bedeutung. Sie betrifft die *Entropie Produktionsrate*  $\Sigma$ , eine wichtige Größe sowohl dafür wie weit ein System vom Gleichgewicht entfernt ist als auch dafür wie schnell es sich dem Gleichgewicht nähert de Groot und Mazur [1984]. [Die Geschwindigkeit der Näherung ist in diesem](#)

---

<sup>1</sup>Die Quantentheorie hat bezüglich der Eigenschaften zwei wesentlich unterscheidbare Quanten: die Bosonen und die Fermionen. Die Photonen gehören zu den Bosonen.

Paper nicht weiter ausgeführt, diese Frage ist im Abschnitt 8 auf Seite 25 behandelt.  $\Sigma$  ist eine generische Form, die in dem Gleichgewichts-Ausdruck des Entropie-Differentials  $dS = dQ/T$  wurzelt, wo  $dQ$  das Differential von Wärme- oder Zufalls-Energie ist, bei Änderungen der System-Energie bleiben Volumen und Teilchenzahl konstant. Die Formel  $\Sigma \sim J_Q(12)(1/T_1 - 1/T_2)$  drückt die Entropie aus, die durch zwei Teilsysteme (1,2) bei Temperaturen  $T_1, T_2$  erzeugt wird bei dem Wärmestrom-Austausch  $J_Q(12)$ . Die Temperaturen der Teilsysteme sind natürlich in Ausdrücken für Entropieproduktion.  $\Sigma$  ist positiv semidefinit und verschwindet dann und nur dann, wenn  $T_1 = T_2$  ist, der Bedingung für das thermische Gleichgewicht. Der Wärmestrom  $J_Q(12)$  verschwindet in diesem Fall auch.

Die Differenz  $1/T_1 - 1/T_2$  der inversen Temperaturen ist ein Maß dafür, wie weit die beiden Teilsysteme aus dem Gleichgewicht sind. Der Wärmestrom  $J_Q(12)$  ist ein Maß dafür, wie schnell sich die Teilsysteme dem Gleichgewicht einander nähern, wenn kein externen Pumpen für das System angenommen wird (oder wenn die Sonne abgeschaltet würde). (Mit externen Pumpen, ist  $J_Q(12)$  ein Maß dafür, welche Leistung in das System eingespeist werden muß, um es vom Gleichgewicht abzuhalten, bzw. es stationär zu halten. Im Falle der Atmosphäre ist es die Frage welche Solarleistung für die Aufrechterhaltung der beobachteten Temperaturen nötig ist, bzw. welche Temperaturen sich einstellen müssen, damit die Solarleistung das System Erde stationär hält.) Das Produkt dieser beiden Größen, dargestellt mit  $\Sigma$ , verbindet die beiden Größen zu einer einzigen charakteristischen Größe eines Nichtgleichgewichts-Prozesses.

Die Bücher von Reichl [1998] und de Groot und Mazur [1984] erläutern ausführlich die Bedeutung und Rolle der Entropie-Produktion von Nichtgleichgewichts-Materie-Systemen. In Abschnitt 7 auf Seite 19, [Essex und Kennedy, 1999] und [Bludman und Kennedy, 1997] werden die Entropie-Produktion in Strahlungs- und Strahlung-Materie-Systemen dargestellt.

## 2 Fehlanwendungen der Temperatur außerhalb des Gleichgewichts

Viele Formeln für verschiedene physikalische Größen haben Einheiten der Temperatur. Diese Formeln sind häufig so definiert, wie die Temperatur in einem Gleichgewichts-System wäre, wenn die Energie, Entropie, Anzahl, etc., alle in einer bestimmten Art und Weise ungeordnet wäre. Es gibt viele Möglichkeiten, ein Systems in einem Gleichgewichtszustand umzuordnen. Folglich sind viele Definitionen dieser pseudo Temperaturen möglich, aber keine repräsentiert eine Temperatur des aktuellen Systems, und die Anwendung der Temperatur auf Nichtgleichgewichts-Systeme ist mehrdeutig Sieniutycz und Berry [1993].

Betrachten wir einen Helium-Neon-Laser mit dem Übergangs-Linie  $\lambda_0 = 632.8$  nm. Ein heuristisches, aber falsches Argument setzt die mittlere Photonenenergie gleich  $k_B T$ . Das würde diesen Übergang mit einer Temperatur  $k_B T_0 = hc/\lambda_0$  oder  $T_0 \sim 2 \times 10^4$  K verbinden. Diese Größe  $T_0$  würde die Temperatur eines schwarzen Körpers sein, wenn die Verteilung von Energie zwischen den Photonen eine durchschnittliche Energieverteilung der Photonen entsprechend der in Frage stehenden Temperatur wäre. Aber die Verteilung ist für alle Laser weit entfernt von einem Schwarzkörper.  $T_0$  bezieht sich auf ein Photonengas mit einer anderen Verteilung von Energie und Entropie. So hat  $T_0$  keine direkte physikalische Bedeutung für Laserstrahlung, welche weit entfernt ist vom Gleichgewicht mit sich selbst und seiner Materie-Quelle.

Laserstrahlung wird oft so idealisiert, daß sie sowohl eine unendliche Temperatur hätte als auch die Laser als eine Quelle reinen Arbeit, obwohl letztendlich diese Interpretation unbefriedigend ist. Es würden leistungsfähige Röntgenlaser auf gleiche Augenhöhe gestellt

mit einem roten Taschen-Laserdioden-Pointer, der durch Uhrenbatterien gespeist wird. Gibt es keinen Unterschied in der "Temperatur"? Es scheint keinen zu geben, wenn beide Laser mit unendlicher Temperatur beschrieben werden.

Andere mögliche Pseudo-Temperaturen sind die Temperaturen, die ein Strahl hätte, wenn die gleiche Energie oder die gleiche Entropie verteilt würde, zum Beispiel als eine Schwarzkörper-Verteilung. Solche Temperaturen widerspiegeln nicht die tatsächliche Verteilung der Energie, Entropie und Photonenzahl in den Strahl. So unterschiedlich diese Definitionen von einander sind, würden sie alle übereinstimmen, wenn die Laserstrahlung in ein thermodynamisches Gleichgewicht gezwungen würde.

Es gibt andere Definitionen der Nichtgleichgewichts-Temperatur, die die tatsächliche Energie- und Entropie-Verteilung wiedergeben. Zum Beispiel, haben Objekte im Labor rund um die Laser sinnvolle lokalen Temperaturen. Das Material um einen He-Ne-Laser wird eine Raumtemperatur  $T_{\text{Zimmer}} \simeq 300$  K haben und das He-Ne-Gas wird  $T_{\text{Gas}} \simeq 400$  K haben.

Die invertierten Besetzungsdichten  $N_2$  und  $N_1$  der oberen und unteren Laser-Energieniveaus  $E_2$  und  $E_1$  sind mit einer Temperatur  $T_{21}$  formal durch eine Boltzmann-Verteilung zu beschreiben,

$$\frac{N_2}{N_1} = \exp \left[ - \frac{E_2 - E_1}{k_B T_{21}} \right], \quad (1)$$

die aber nicht für alle Niveaus zu halten ist. Eine solche Pseudo-Temperatur kann nur für jeweils zwei Niveaus definiert werden. In diesem Fall bedeutet die Definition und die invertierte Besetzungsdichte einen negativen Wert für  $T_{21}$ . Aber einer solchen Definition fehlt eine thermodynamische Begründung.

Obwohl die inverse atomaren Besetzung für die Laser-Wirkung wichtig ist, gibt es keinen Grund einem Strahlungsfeld diese Temperatur  $T_{21}$  zuzuordnen, als eine separate Einheit mit eigener Thermodynamik. In Abschnitt 4 auf der nächsten Seite und Abschnitt 5 auf Seite 11 werden wir die natürlichen Strahlungs-Temperatur erläutern, die ihren unverwechselbaren Charakter darstellt, und verweisen auf eine allgemeinere Definition im Sinne einer Energieverteilung über die Zustände. Temperatur entsteht nicht als Proxy für Energie, sondern als ein Maß dafür, wie die Energie unter den verschiedenen Mikrozustände organisiert ist. Sie besitzt eine strenge Definition und spielt eine natürliche Rolle bei Nichtgleichgewichtssystemen bei heuristischen *Ad-hoc*-Berechnungen Silfvast [1996].

### 3 Die Dynamik des Strahlungsfeldes

Wir analysieren das Strahlungsfeld in einem kleinen Kasten und zerlegen es in ebene Wellen-Modi M. Sargent III und W. E. Lamb [1974], Merzbacher [1969]. Jeder Feld-Modus des Wellenvektors  $\mathbf{k}$  und einer bestimmten Polarisation füllt den Raum. (Wir ignorieren der Einfachheit halber die Polarisation in diesem Paper, da sich dadurch nicht die Allgemeinheit der Argumentation ändert.) Der grundlegende Moden-Variable ist die komplexe Amplitude  $\alpha_{\mathbf{k}} = a_{\mathbf{k}} e^{i\phi_{\mathbf{k}}}$ , mit den Größen Amplitudenbetrag  $a_{\mathbf{k}}$  und Phase  $\phi_{\mathbf{k}}$ .

Jeder Modus ist ein linearer harmonischer Oszillator und kann auf einen gequantelten harmonischen Oszillator abgebildet werden durch die Vernichtungs- (Erzeugungs-) Operatoren  $\hat{a}_{\mathbf{k}}$  ( $\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger$ ) [[. . . Wikipedia](#)], die für jeden Modus  $[\hat{a}_{\mathbf{k}}, \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger] = \hat{1}_{\mathbf{k}}$  erfüllen. Der Zustand von einem Modus existiert in einem unendlich-dimensionalen Hilbert-Raum. Die Besetzungszahl  $|n\rangle$  bildet ein vollständiges Orthonormalsystem der Zahl der Eigenvektoren des Operators zu verschiedenen Photonenzahlen:  $\hat{n}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle = n_{\mathbf{k}}|n_{\mathbf{k}}\rangle$  und  $\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{1}$ . Der Hamilton-Operator des Feldes ist  $\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} h\nu(\hat{n}_{\mathbf{k}} + 1/2)$ , mit  $\nu = ck$ . Der Zustand des ge-

samten Feldes ist das direkte Produkt aller seiner Moden-Zustände und existiert in einem Feld-Hilbert-Raum (Fock-Raum).

Eine alternative Grundlage sind kohärente Zustände  $|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle$ , die Eigenzustände der Vernichtungsoperators:  $\hat{a}_{\mathbf{k}}|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle = \alpha_{\mathbf{k}}|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle$ , so definiert, dass die Erwartung der Besetzungszahl  $N_{\mathbf{k}} = \langle \alpha_{\mathbf{k}} | \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} | \alpha_{\mathbf{k}} \rangle = |\alpha_{\mathbf{k}}|^2 = a_{\mathbf{k}}^2$  ist. Kohärente Zustände genügen

$$\int \frac{d^2\alpha}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| = \hat{1}, \quad \langle \beta | \alpha \rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha-\beta|^2 + i\text{Im}(\beta^*\alpha)}, \quad \langle n | \alpha \rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}. \quad (2)$$

Der Zustand  $|\alpha_{\mathbf{k}}\rangle$  ist das Quanten-Analogon eines einzigen klassischen Modus  $\mathbf{k}$  mit der Amplitude  $\alpha_{\mathbf{k}}$ . Physikalische Ergebnisse können erreicht werden entweder auf Basis der kohärenten Zustände oder auf Basis der Besetzungszahl der Photonen  $|n\rangle$  Merzbacher [1969].

Problem 1: Wir benutzen die Definition von  $\langle n | \alpha \rangle$ , um die obige Identität herzuleiten: Das Ergebnis für die Ableitung  $\langle \beta | \alpha \rangle$  und die Integralidentität für kohärente Zustände  $|\alpha\rangle$ . Auch wird direkt gezeigt, durch Ausweitung von  $|\alpha\rangle$  in  $|n\rangle$ , dass  $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$  ist.

Die Thermodynamik erfordert eine statistische Beschreibung mit einem Ensemble von vielen Fock-Räumen. Jeder Modus verfügt über ein Ensemble von Amplituden und Phasen und das Ensemble des gesamten Feldes ist das direkte Produkt der Moden-Ensembles Reichl [1998].

Sehr hohe Temperaturen sind in bosonischen Systemen bei niedriger Entropie und hohen Energien zu erwarten, die vom thermodynamischen Gleichgewicht entfernt sind, wie die LASER. Derart hohe Temperaturen sind natürlich für Bosonen, weil diese kein Ausschluss-Prinzip haben. Im Idealfall, könnte in einem Vielteilchen bosonischen System die Entropie auf Null gebracht werden, indem alle Teilchen in einen Einteilchen-Zustand, ohne Veränderung der System-Gesamtenergie, gebracht werden. Wie in Abschnitt 4.3 auf Seite 10 gezeigt wird, wäre die Temperatur dieses Zustandes unendlich, wenn die Gesamtenergie erhalten bleibt.

## 4 Nichtgleichgewichtsthermodynamik

Das statistische Ensemble eines System definiert die Entropie des Systems. Die Definition der Temperatur eines Systems oder Teilsystems erfordert die Beschränkung auf Fälle, wo Entropie und Energie eine funktionale Beziehung haben. Eine physikalisch sinnvolle Definition der Temperatur sollte den tatsächlichen System-Zustand widerspiegeln und die Gleichgewichts-Temperatur richtig einbeziehen.

### 4.1 Die Entropie im Allgemeinen

Zur Definition der Entropie, benutzen wir ein Ensemble aus einer großen Anzahl  $M$  von Kopien eines Systems, von dem wir annehmen, daß es aus diskreten, zählbaren "Dingen" gemacht wurde. Physikalisch sind diese Dinge die grundlegenden Freiheitsgraden des Systems. Wegen der statistischen Schwankungen, ist jedes Exemplar mikroskopisch verschieden und unterscheidbar von den anderen.

Betrachten wir die Entropie zweier System-Kopien.  $W_1$  möge die Gesamtzahl der Möglichkeiten sein, wie die erste Gruppe von Dingen arrangiert werden kann und  $W_2$  die entsprechende Zahl für die zweite Gruppe der Dinge. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten  $W$ , wie mit beiden Gruppen arrangiert werden kann, ist das Produkt  $W = W_1 \times W_2$ . Für die Entropie, wollen wir eine Funktion von  $W$  haben, die übereinstimmt mit der üblichen Definition für den speziellen Fall des Gleichgewichts. Deshalb muss diese Funktion von  $W$  so von der Kombination der beiden Teilsysteme abhängen, dass die Entropien der separaten Teilsysteme

addiert werden. Eine solche Funktion muss eine lineare Funktion des Logarithmus von  $W$  sein. Die Definition  $S = k_B \ln W$ , ist - bis auf einen multiplikativen Faktor und eine irrelevante additive Konstante - die einzige Funktion, die das tut. Beachten Sie, dass die Entropie additiv sein sollte, muss aber nicht in einfacher Weise mit der Größe des Systems skaliert werden. Bei einem Nichtgleichgewichts-System brauchen die Teilsysteme, obwohl sie additiv zum Ganzen beitragen, weder homogen zu sein und noch wäre ihr Beitrag eine einfache Skalierung.

Jede System-Kopie hat die gleichen internen Wahrscheinlichkeiten  $p_\sigma$  für einen bestimmten Zustand  $\sigma$ . Die Zahl von System-Kopien im Zustand  $\sigma$  ist  $Mp_\sigma = m_\sigma$ . Nehmen wir an, dass das Ensemble  $m_1$  Systeme im Zustand  $\sigma_1$  hat,  $m_2$  Systeme im Zustand  $\sigma_2$ , etc. Die Zahl der Möglichkeiten wie dieses Ensemble aus den System-Kopien erstellt werden kann, ist

$$W_M = M!/[m_1!m_2!\dots m_\sigma!\dots] \quad (3)$$

und die Entropie für jedes Mitglied des Ensembles ist  $S = k_B \ln(W_M)/M$ . Für große  $M$ , ergibt die Stirling-Formel

$$MS = k_B[M \ln M - \sum_\sigma (m_\sigma \ln m_\sigma)]. \quad (4)$$

(Die Stirling-Approximation ist  $n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$  für große  $n$ . Wir ignorieren additive Konstanten in der Entropie, da diese von den thermodynamischen Zustand des Systems unabhängig sind.)

Da  $m_\sigma = Mp_\sigma$ ,

$$\begin{aligned} S &= k_B[\ln M - \sum_\sigma (p_\sigma \ln M + p_\sigma \ln p_\sigma)] \\ &= k_B[(1 - \sum_\sigma p_\sigma) \ln M - \sum_\sigma p_\sigma \ln p_\sigma] \\ &= -k_B \sum_\sigma p_\sigma \ln p_\sigma \end{aligned} \quad (5)$$

wobei die letzte Zeile aus  $\sum_\sigma p_\sigma = 1$  folgt und das Ensembles der System-Kopien unabhängig ist.

Ein thermodynamisches statistischen Ensemble des Systems ist äquivalent zu einem normalisierten, hermiteschen Dichte-Operator  $\hat{\rho}$ :  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \sum_\sigma p_\sigma = 1$ . Die  $p_\sigma$  sind die Eigenwerte von  $\hat{\rho}$  mit den Eigenvektoren  $|\sigma\rangle$ . Jede Observable  $\mathcal{O}$  hat einen statistischer Mittelwert

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{\mathcal{O}}) = \sum_\sigma p_\sigma \langle \sigma | \hat{\mathcal{O}} | \sigma \rangle \quad (6)$$

Der Mittelwert des Operator  $-k_B \ln \hat{\rho}$  ist die Entropie  $S = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ . Die mittlere Energie  $E = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{H})$  ist der Durchschnitt des Hamilton-Operators  $\hat{H}$  Reichl [1998].

## 4.2 Die Gültigkeit der Nichtgleichgewichts-Temperatur

Außerhalb des Gleichgewichts fehlt der Entropie  $S$  eine klare funktionale Abhängigkeit von der Gesamtenergie  $E$ , und die Definition von  $T$  wird mehrdeutig. Jedoch mit einer wichtige Verallgemeinerung ist ein  $T$  mit gewissen Einschränkungen immer noch möglich. Die entscheidende Voraussetzung ist, das ganze System so in Teilsysteme zu zerlegen, daß deren Entropien nur Funktionen der Energie des einzelnen Teilsystems sind. Das heißt, das

Nichtgleichgewichts-System muss in Teilsysteme zerlegt werden, von denen jedes Einzelne sein eigenes Gleichgewicht hat. Die Beschränkung auf das volle Gleichgewicht ist unnötig.

Wir schreiben das komplette System der Hamilton-Operatoren als  $\hat{H} = \sum_p \hat{H}_p + \sum_{q>p} \hat{H}_{pq}$ , wobei die erste Summe die Summe über die einzelnen Teilsysteme und die zweite Summe die Summe über alle Wechselwirkungen zwischen den Teilsystemen ist. Der vollständige  $\hat{\rho}$  wird entwickelt über die Quanten-Liouville Gleichung  $i\hbar d\hat{\rho}/dt = [\hat{H}, \hat{\rho}]$ . Um für ein bestimmtes Teilsystem  $p$  eine klar definierte Thermodynamik zu haben, sind die folgenden Beschränkungen notwendig:

(1) Der Dichte-Operator des Gesamtsystems  $\hat{\rho}$  muss faktorisierbar sein in unabhängige Teilsysteme:  $\hat{\rho} = \otimes_p \hat{\rho}_p$ . Diese Zerlegung bedeutet, dass die Entropie des Gesamtsystems  $S$  eine Summe über Teilsysteme:  $S = \sum_p S_p$  ist.

(2) Der Kommutator  $[\hat{H}_p, \hat{\rho}_p]$  muss gering oder null sein. Dann sind  $\hat{\rho}_p$  und  $\hat{H}_p$  gleichzeitig diagonalisierbar, und eine funktionale Beziehung  $\hat{\rho}_p = \hat{\rho}_p(\hat{H}_p)$  ist möglich. Die Wahrscheinlichkeiten des Ensembles der Teilsysteme sind  $p_{p\sigma} = \langle \sigma | \hat{\rho}_p(\hat{H}_p) | \sigma \rangle = p_{p\sigma}(E_{p\sigma})$ . Das heißt, jeder Eigenwert  $p_{p\sigma}$  von  $\hat{\rho}_p$  ist *nur* eine Funktion des entsprechenden Eigenwerts  $E_{p\sigma}$ . Er ist keine Funktion der anderen Energieeigenwerte  $E_{p\mu}$  von Teilsystem  $p$  oder der  $\{E_{q\mu}\}$  der anderen Teilsysteme  $q$ . (Wenn die Wechselwirkungen  $\hat{H}_{pq}$  zwischen den Teilsystemen vernachlässigbar sind, dann ist die Energie  $E$  des Gesamtsystems eine Summe über die  $E_p$ s und jedes einzelne Teilsystem ist in einem stationären Zustand. Aber diese Beschränkung ist nicht erforderlich. Zum Beispiel, sind die Modi der Laserstrahlung im Laserresonator stark abhängig vom externen Pumpen.)

Diese besonderen Umstände erlauben eine funktionelle Beziehung zwischen den Durchschnittswerten der Entropie und der Energie für jedes Teilsystem des Ensembles, so dass diese nicht von der spezifischen Wahrscheinlichkeits-Verteilung  $\{p_\sigma\}$  abhängen. Das bedeutet  $S_p = S_p(E_p)$ , was zu einer natürlichen Temperatur des Teilsystem  $p$  führt:

$$\frac{1}{T_p} = \frac{\partial S_p}{\partial E_p} \quad (7)$$

wobei  $T_p$  ist eine Veränderungsrate zwischen extensiven Größen, wie sie in der Thermodynamik normal ist. Eine solche Beziehung besteht für Photonen, wenn die Teilsysteme über genügend kleine Energiebereiche gewählt sind. Wir bemerken, dass

1. die funktionale Beziehung  $S_p = S_p(E_p)$  eine Zustandsgleichung ist.
2. wenn  $S_p$  ist eine Funktion der  $E_q$ , für  $q \neq p$ , ist die Temperatur  $T_p$  auch definiert, ist aber nicht eine Funktion des Teilsystems  $p$  allein.
3. Wenn viele Teilsysteme in Kontakt miteinander sind, stellen ihre Temperaturen die Grundlage für ihr vollständiges thermischen Gleichgewicht dar. Für jedes Paar von Teilsystemen  $(p, q)$  gilt  $T_p = T_q = T$ , wobei  $T$  ist die einzige Temperatur des Gesamtsystems:  $1/T = \partial S / \partial E$ .

Ein bekanntes Beispiel für solche Teilsystem-Temperaturen tritt im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht eines Strahlungsfeldes auf, das typisch für Sterninnere ist Bludman und Kennedy [1997], Mihalas und Weibel-Mihalas [1999]. In diesem Fall werden periodische Randbedingungen angewendet für kleine lokale Boxen bei Positionen  $\mathbf{r}$ . In jeder Box kann für

jeden Fourier-Modus  $\mathbf{k}$  des Ensemble ein anderes Feld und dessen Temperatur  $T(\mathbf{k})$  definiert werden. (Moden mit sehr langer Wellenlängen, die nicht in die kleinen lokalen Boxen passen, müssen ignoriert werden.) So hat jedes Teilsystem einen besonderen Modus  $\mathbf{k}$  in einer Box bei  $\mathbf{r}$  und  $T_p$  wird eine Temperatur  $T(\mathbf{r}, \mathbf{k})$  im Photonen-Phasenraum. An einem Punkt  $\mathbf{r}$  im Raum ist die Strahlungstemperatur der Photonen eine Funktion des Frequenz-Modus  $\nu = ck$  und der Richtung  $\hat{\mathbf{k}}$  und wird konventionell geschrieben als  $T_\nu(\hat{\mathbf{k}})$ . In Abschnitt 5 auf der nächsten Seite und Abschnitt 6 auf Seite 16 zeigen wir, wie sich diese Temperatur natürlich als reale thermodynamische Temperatur entpuppt.

### 4.3 Reine Zustände und unendliche Temperatur

Ein reiner Zustand hat die Entropie Null. Eines der  $p_\sigma$  (sagen wir  $p_\tau$ ) ist Eins, während die anderen verschwinden und so ist  $S = 0$ . Es gibt viele Möglichkeiten, um einen reinen Zustand bei einem idealisierten Lasers zu realisieren. Die beiden einfachsten sind ein rein kohärenter Zustand  $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$  oder ein reiner Besetzungszahl-Zustand  $\hat{\rho} = |n\rangle\langle n|$ .

Problem 2: Im Allgemeinen ist  $\hat{\rho}$  eine Mischung von Projektions-Operatoren über verschiedene Zustände, z. B. in der Zahlenbasis  $\hat{\rho} = \sum p_{nm} |n\rangle\langle m|$ . Aber das Ensemble von einem reinen Zustand  $|\psi\rangle$  ist  $\hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi|$ , ein einziger Projektions-Operator ist keine Mischung. Zu beweisen ist, dass die Eigenwerte eines reinen Ensemble nur eins oder null sein können. Tipp: Ein normalisierter Projektionsoperator  $\hat{\Pi} = |\psi\rangle\langle\psi|$  mit  $\langle\psi|\psi\rangle = 1$  erfüllt  $\hat{\Pi}^2 = \hat{\Pi}$ . Dann ist zu schließen, daß die Eigenwerte  $p$  eines reinen  $\hat{\rho}$  die formal identisch Gleichung  $p^2 = p$  erfüllen.

Wir definieren eine Single-Mode-Ensemble  $\{p_\sigma\}$ . Der Ensemble-Mittelwert der Energie ist durch  $E = \sum_\sigma p_\sigma E_\sigma$  gegeben, wobei  $E_\sigma = \langle\sigma|\hat{H}|\sigma\rangle$ . Die Temperatur des Teilsystem wird durch eine Ableitung definiert:

$$\frac{1}{k_B T} = - \frac{\sum_\sigma \ln p_\sigma dp_\sigma}{\sum_\sigma E_\sigma dp_\sigma} \quad (8)$$

wobei  $\sum_\sigma dp_\sigma = 0$ .

Diese Definition der Temperatur eines Teilsystems ist eine einfache Anpassung des thermischen Gleichgewicht der Teilsysteme über die Ensemblemitglieder. Dieses Argument verlangt nicht, alle Mitglieder des Ensembles zu beteiligen, aber für die Wahrscheinlichkeiten wird angenommen, dass sie normalisiert werden über die aktiven Mitglieder des Ensembles, der Rest wird ignoriert. Gleichung (8) stellt somit eine legitime Gleichgewichts-Temperatur nur jener Ensemblemitglieder dar, die in die Summation einbezogen waren.

Betrachten wir zwei Fälle, die auf einer Abfolge der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der Gleichgewichts-Teilsysteme mit der Temperatur basieren, die durch Gleichung (8) definiert wurde:

(1) Im Gleichgewicht über alle Ensemble-Mitglieder sind die  $p_\sigma$  sehr gering, weil die Wahrscheinlichkeit über das ganze Ensemble verteilt ist. So wie die mittlere Ensemble-Energie  $E$  fällt, während das Gleichgewicht erhalten bleibt, wird der Mittelwert von den niedrigsten Werten der  $\{E_\sigma\}$  bestimmt und bei den anderen werden tiefere und tiefere Energiezustände besetzt. Dann wird  $\{p_\sigma\}$  dominiert von einem  $p_\tau \rightarrow 1$ , während die anderen verschwinden. Aber in den meisten Systemen verschwindet der Nenner in Gleichung (8) schneller als der sich langsam ändernden Logarithmus des Zählers. So geht im Gleichgewicht  $T \rightarrow 0$  sowohl  $E$  als auch  $S \rightarrow 0$ . Das klassische Beispiel ist das Bose-Einstein-Kondensat Reichl [1998].

(2) Im Nichtgleichgewichts-Fall, der in diesem Paper interessiert, ist die mittlere Energie  $E$  des Ensembles unveränderlich. In diesem Falle verteilen sich Energie und Ensemble-Wahrscheinlichkeit in Ensembles sukzessive in kleinere eingeschränkte Teilräume des Hilbert-

Raum. Die Energie wird nacheinander auf diesen kleinere Ensembles im Gleichgewicht gehalten. Gleichung (8 auf der vorherigen Seite) gilt noch in diesen kleineren Ensembles, aber  $E$  und  $\{p_\sigma\}$  sind über weniger Zustände verteilt. Ein  $p_\tau$  ist näherungsweise eins und die anderen verschwinden. Die Anzahl der Ensemble-Mitglieder sinkt auf eins, dem Grenzfall des reinen Zustands, und führt im Grenzfall der möglichen Teilsystem im Ensemble zu dem Grenzwert

$$\frac{1}{k_B T} \sim -\frac{\ln p_\tau}{E_\tau} \rightarrow 0 \quad (9)$$

für die Temperatur. So wird  $T \rightarrow \infty$  für einen reinen Zustand, wenn die Gesamtenergie erhalten bleibt, während die Entropie verschwindet.

Diese Ergebnisse zeigen, wie Temperatur nicht nur von der Ensemble-Energie  $E_\sigma$ , sondern auch von der Ensemble-Verteilung  $\{p_\sigma\}$  abhängt.

Das Strahlungsfeld eines realen Lasers ist kein reiner Zustand. Jeder Modus hat ein statistische Ensemble von Amplituden oder Besetzungs-Zahlen, mit der damit verbundenen Entropie. So als ob das Feld erhält eine klassische oder Quanten-Beschreibung, hat ein realer Laser keine unendliche Temperatur, obwohl Laser-Temperaturen oft als unendlich idealisiert werden.

## 5 Strahlungs-Entropie und Temperatur

Ab diesem Punkt werden wir mit einzelnen Photonen-Moden  $\mathbf{k}$  arbeiten und lassen die Mode-Label dort weg, wo sie nicht gebraucht werden. Statistische Ensembles von Strahlung können durch einen Dichte-Operator  $\hat{\rho}$  beschrieben werden M. Sargent III und W. E. Lamb [1974], Mandel und Wolf [1995], Reichl [1998]. Obwohl ein realer Laser nicht in einen kohärenten Zustand ist, ist der kohärente Zustand als Grundlage besonders nützlich, weil er die Strahlungs-Modenbeschreibung mit Amplitude und Phase mit der Photonen-Zahl und Energie verbindet.

Im Prinzip könnten wir die Entropie  $S$  und andere thermodynamische Funktionen mit  $\hat{\rho}$  berechnen und finden  $T$ . Aber es ist schwierig,  $S$  für beliebige  $\hat{\rho}$  berechnen. Wir betrachten nur den Spezialfall, wo das Strahlungsfeld des statistischen Ensemble unabhängig von der Phase  $\phi$  ist. Für die meisten Laser ist die Phase in vollem Umfang zufällig. Die Moden-Energie  $E = h\nu N$  ist immer Phasen-unabhängig, sie hängt nur von der Erwartung  $N = \text{Tr}(\hat{a}^\dagger \hat{a})$  der Photonenzahl des Ensembles. In diesem eingeschränkten Fall beeinflusst die Phase weder  $S$  noch  $T$ . Diese Einschränkung vereinfacht  $S(N)$  das Nichtgleichgewicht zu einer allgemeinen Form, mit der wir durch einfache Zählung ein Argument für Bosonen erhalten.

2

### 5.1 Kohärente Zustands Basis – zufällige Feld-Phase

Der Dichte-Operator kann über kohärente Zustände  $\hat{\rho} = \int d^2\alpha P(\alpha) |\alpha\rangle \langle \alpha|$  ausgedehnt werden und wird dann auf die  $|n\rangle$  Basis projiziert  $p_{nm} = \langle n | \hat{\rho} | m \rangle$ . Die Normalisierung ist unveränder-

---

<sup>2</sup>Eine Laserstrahlung ist meist kohärent, aber der Anfangswert der Strahlungs-Phase ist zufällig. Einmal ausgewählt, sind die Phasen aller Laser-Atome gekoppelt. Der Einfachheit halber ignorieren wir die wichtige Ausnahme des Moden-gerasteten-Lasers, bei dem externe und interne Signale nichtlineare Modenkopplungen Pick-and-lock eine Phase für den Strahlen-Modus selbst rasten. Ohne eine solche Garantie, wird selbst eine anfängliche scharf definierte Strahlungs-Phase statistisch diffundieren bis zu einem Ensemble über das Intervall  $\phi \in [0, 2\pi)$ .

lich,  $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \int d^2\alpha P(\alpha) = \sum_n p_{nn} = 1$ .<sup>3</sup>

Die Entropie ist durch  $S = -k_B \text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = -k_B \sum_n \langle n | \hat{\rho} \ln \hat{\rho} | n \rangle$  gegeben. Wir beschränken die Verteilungs-Funktion  $P(\alpha)$  dahingehend, daß sie unabhängig von Phase  $\phi$  ist und nur vom Modul  $a$  abhängt. Die Matrix  $p_{nm}$  wird dann diagonal:

$$p_n \equiv p_{nn} = \int d^2\alpha \langle n | \alpha \rangle \langle \alpha | n \rangle P(\alpha) = 2\pi \delta_{nn} \int_0^\infty da \frac{a^{2n+1}}{n!} e^{-a^2} P(a) \quad (10)$$

Die Entropie vereinfacht sich zu  $S = -k_B \sum_n p_n \ln p_n$ . Die Eigenzustände  $|\sigma\rangle$  von  $\hat{\rho}$  sind die Besetzungszahl-Zustände  $|n\rangle$ . Die Verteilung  $P(\alpha)$  ist phasen-unabhängig, wenn die Phasenverteilung für die Amplitude  $\alpha$  zufällig im Intervall  $\phi \in [0, 2\pi)$  ist.

Die Beschränkung auf zufällige Phase und das Ergebnis, dass der Moden-Zustand durch Zählen der Anzahl Photonen allein charakterisiert werden kann validiert die Phasenraum-Näherung zur Photonen-Thermodynamik. Für jeden Feldmodus, beschrieben durch eine Wellenzahl  $\mathbf{k}$ , ist der Moden-Zustand ausschließlich bestimmt durch seine mittlere Photonen-Besetzungszahl  $N_{\mathbf{k}} = \sum_n p_{\mathbf{k}n} n_{\mathbf{k}}$ .<sup>4</sup>

## 5.2 Phasenraumreduktion: Photonen-zählung

Wird das statistische Ensemble des Feldes phasen-unabhängig gemacht, so ermöglicht das es uns nach  $S(N)$  durch einfaches Abzählen Zuständen für identische Bosonen, zu suchen, indem die Feldquanten als Teilchen behandelt werden. In diesem Fall ist die ganze Entropie durch die Zufälligkeit der Phase bestimmt. Die Argumentation dieses Abschnitts ist parallel zu Abschnitt 4.1 auf Seite 7.

Betrachten Sie  $N$  identische Dinge und sie auf  $G$  mögliche identisch Orte zu setzen. Stellen Sie sich vor, nicht zu wissen, wo die  $N$  Dinge zu den Orten  $G$  gehören. Dann gibt es  $(N + G - 1)!/N!(G - 1)! = W$  Möglichkeiten der Verteilung der  $N$  Dinge auf die  $G$  Plätze. Nun führen wir ein Ensemble von  $M$  System-Kopien ein, wobei jede Kopie mit  $\sigma$  markiert wird. Für Systeme wie Laser mit einer großen Zahl von Photonen, können wir davon ausgehen, dass  $G$  und  $N \gg 1$  ist und die Stirling-Näherung verwenden dürfen.  $G$  und  $N$  hängen von der System-Kopie  $\sigma$  in das Ensemble ab. Die Entropie ist dann:

$$\begin{aligned} MS &= k_B \sum_{\sigma} [-G_{\sigma} \ln G_{\sigma} + (G_{\sigma} + N_{\sigma}) \ln(G_{\sigma} + N_{\sigma}) - N_{\sigma} \ln N_{\sigma}] \\ &= k_B \sum_{\sigma} G_{\sigma} [(1 + n) \ln(1 + n) - n \ln n], \end{aligned} \quad (11)$$

wobei  $n_{\sigma} = N_{\sigma}/G_{\sigma}$  die mittlere Besetzungszahl im Ensemble ist und nähert sich der  $\sigma$ -unabhängigen Grenze  $n = N/G$  mit  $G = \sum_{\sigma} G_{\sigma}/M$  für  $M \rightarrow \infty$ . Weil  $h\nu/T = \partial S/\partial N$  und  $N = Gn$ ,

$$k_B T = \frac{h\nu}{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}. \quad (12)$$

<sup>3</sup>Die allgemeine Darstellung des kohärenten Zustandes  $\hat{\rho}$  ist  $\int d^2\alpha d^2\beta R(\alpha, \beta) |\alpha\rangle\langle\beta|$  ist aber für unsere Zwecke in dieser Form nicht erforderlich. [M. Sargent III und W. E. Lamb, 1974]

<sup>4</sup>Dieses Ergebnis spiegelt die Komplementarität der Photonen-Zahl und Feldphase. Der Quanten-Phase (Susskind-Glogower) Operator  $\exp(i\hat{\phi}) \equiv \hat{a}/\sqrt{\hat{a}\hat{a}^\dagger} = \sum_n |n\rangle\langle n+1|$  ist nichtdiagonal in der  $|n\rangle$  Basis. Der Kommutator  $[\exp(i\hat{\phi}), \hat{n}] = \exp(i\hat{\phi}) \neq 0$ . Siehe [Walls und Milburn, 1994] für eine detaillierte Erforschung der Strahlungs-Phase im Quanten-Fall.

Problem 3: Kombinieren Sie Gleichung (11 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (12 auf der vorherigen Seite) um  $S$  in Termen von  $T$  auszudrücken.

Um das Ergebnis von Gleichung (12 auf der vorherigen Seite) mit den Observablen der Strahlung zu verbinden, identifizieren die  $G$  "Plätze" mit der Fourier-Raum der Moden  $\mathbf{k}$  und verwenden die allgemeine Beziehung zwischen der mittleren Besetzungszahl  $n$  und der spezifische Intensität  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}})$ :  $n = c^2 I_\nu(\hat{\mathbf{k}}) / h\nu^3$ , wobei  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  die Strahlung Energie / Raum / Zeit / Frequenz / Raumwinkel Mihalas und Weibel-Mihalas [1999], <sup>5</sup> ist. Der daraus resultierenden Ausdruck für die Temperatur,

$$k_B T_\nu(\hat{\mathbf{k}}) = \frac{h\nu}{\ln \left[ 1 + \frac{h\nu^3}{c^2 I_\nu(\hat{\mathbf{k}})} \right]} \quad (13)$$

kann auch vom Ausdruck des Planckschen Schwarzkörperstrahlers hergeleitet werden für  $I_\nu$  durch die Lösung für  $T$  und *Definition* der daraus resultierenden Temperatur vom Term  $I_\nu$ . Der Wert von  $I_\nu$  kann dann beliebig sein Essex und Kennedy [1999]. Die Strahlungstemperatur ändert sich in Abhängigkeit sowohl von der Strahlrichtung  $\hat{\mathbf{k}}$  als auch von der Frequenz  $\nu$ . Außer bei der Frequenz Null, ist  $T_\nu$  nur Null für verschwindendes  $n$  oder  $I_\nu$  (Photonen im Vakuum).

### 5.3 Die Temperatur als Lagrange-Multiplikator

Anstelle von Gleichung (8 auf Seite 10) mit ihren Annahmen über Wahrscheinlichkeiten, kann stattdessen die Temperatur als Lagrange-Multiplikator zur Maximierung der Entropie bei Erhaltung der mittleren Energie des Ensemble benutzt werden. Dieses Verfahren kann erweitert werden auf Teilsysteme, wie ein einziger Strahlen-Modus oder eine Sammlung von Modi, die einen Fourier-Teilraum  $K$  bilden - einen Teil des gesamten Moden-Raums. Die Schlussfolgerungen der vorhergehenden Abschnitte werden in einer anderen Weise bestätigt, solange der Modus Phasen zufällig sind.

Wenn wir Gleichung (11 auf der vorherigen Seite) im Fourier-Raum ausdrücken, ist die reale räumliche Volumendichte  $s$  die Entropie von Photonen, die zur Wellenzahl  $\mathbf{k}$  und Frequenz  $\nu = ck$  in den Fourier-Unterraum  $K$  beigetragen:

$$s = \int_K k_B [(1+n) \ln(1+n) - n \ln n] \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (14)$$

wobei  $n$  die mittlere Besetzungszahl ist. Die reale räumliche Volumendichte  $e$  der Energie in  $K$  ist:

$$e = \int_K nh\nu \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (15)$$

Die maximale Entropie wird bei unveränderter Energie durch [die Lösung der Variationsaufgabe](#) ermittelt ( $\beta$  ist der Lagrange-Multiplikator der Variationsaufgabe)

$$0 = \delta(s + \beta e) = \int_K \delta \left[ \ln \left( \frac{1+n}{n} \right) - \beta h\nu \right] \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \quad (16)$$

---

<sup>5</sup>Für viele Laser-Anwendungen, ist es sinnvoll, die Energiedichte des Strahls als ungefähr  $u = h\nu n = I/c$  zu nähern. Aber diese Beziehung impliziert einen exakt parallelen Strahlengang und eine unphysikalische Delta-Funktion der Intensität beim Winkel.

woraus wir schließen<sup>6</sup>, dass

$$n = \frac{1}{e^{\beta h\nu} - 1} \quad (17)$$

Wir finden eine scheinbare Schwarz-Körper-Verteilung für die spezifische Intensität:

$$I_\nu = \frac{h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}, \quad (18)$$

und identifizieren **deshalb** den Lagrange-Multiplikator mit  $\beta = 1/k_B T$ . Wir definieren die spezifische Intensität der Entropiestrahlung  $J_\nu$  durch Photonen-Zählung, die gleiche Weise, wie die spezifische Energie-Intensität  $I_\nu$  definiert ist [Essex und Kennedy, 1999]. So finden wir eine andere Version von Gleichung (7 auf Seite 9):

$$\frac{1}{T_\nu(\hat{\mathbf{k}})} = \frac{\partial J_\nu(\hat{\mathbf{k}})}{\partial I_\nu(\hat{\mathbf{k}})} \quad (19)$$

Wenn  $K$  alle Fourier-Räume wären, dann wäre diese Verteilung ein Gleichgewicht mit einer einzigen Temperatur  $T$ . Aber dann hätten wir  $K$  nicht beschränkt. Wenn  $K$  ein Teil der Fourier-Raum ist, ist die Verteilung eine Schwarzer-Körper-Verteilung, aber beschränkt nur auf seine Domäne des Fourier-Teilraums. Dieser Teilraum ist komplett mit seiner eigenen Temperatur  $k_B T[K] = \delta E[K]/\delta s[K]$ , obwohl nicht die gesamte Verteilung vorhanden ist. Die Einfachheit der Strahlung-Thermodynamik wandelt die Funktionen  $s = s(n[K])$  und  $e = e(n[K])$  in eine implizite Funktion  $s(e)$  über  $K$ , passend zu dem allgemeineren Argument des Abschnitt 4.2 auf Seite 8. Daher bildet jedes  $K$  ein unterschiedliches thermodynamisches System mit einer Temperatur, die durch Gleichung (13 auf der vorherigen Seite) gegeben ist oder erhalten wird durch Umkehrung von Gleichung (18).

Dieses Argument kann erweitert werden zu einem  $K$  mit dem Volumen Null. Mit dem Ausdrücken einer bestimmten Strahlungsenergie sowohl in einen verschwindend kleinen Frequenzintervall  $\Delta\nu$  und als auch Raumwinkel  $\Delta\Omega$  des Strahlungs-Kegels, erhalten wir die unendliche Temperatur von einem reinen Zustand für einen Modus  $\mathbf{k}$  mit  $\nu = ck$ , wie wir anschließend zeigen.

Betrachten wir eine beliebige feste spezifische Intensitäts-Verteilung  $I_\nu$  und zerbrechen diese in zwei Teile, eine Schwarz-Körper-Funktion  $B_\nu$  konstanter Temperatur  $T$ , plus eine endliche abweichende Verteilung  $D_\nu(\hat{\mathbf{k}})$ , die von der Richtung ab  $\hat{\mathbf{k}}$  abhängen kann. So ist  $I_\nu = B_\nu + D_\nu$ . Die Energiedichte  $u$  mit  $(\Delta\nu, \Delta\Omega)$  wird gegeben durch

$$\begin{aligned} cu &= \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta\nu} d\nu I_\nu = \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta\nu} d\nu (B_\nu + D_\nu) \\ &= \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta\nu} d\nu \frac{h\nu^3/c^2}{e^{h\nu/k_B T} - 1} + \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta\nu} d\nu D_\nu. \end{aligned} \quad (20)$$

Wenn wir eine Variable  $x = h\nu/k_B T$  substituieren, kann das erste Integral der rechten Seite von Gleichung (20) so neu dargestellt werden:

$$\frac{h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta x} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \quad (21)$$

---

<sup>6</sup>Die Lösung der Variationsaufgabe erfordert hier, daß die eckige Klammer identisch Null ist.

Es ist klar, dass ein Gehen von  $\Delta\nu$  auf Null bedeutet, dass  $\Delta x$  ebenfalls auf Null geht. Wegen Gleichung (13 auf Seite 13) kann  $T$  nicht Null erreichen, außer für Null-Intensität  $I_\nu \rightarrow 0$ . Dieser Grenzwert wird nicht erreicht, weil wir voraussetzten, dass die Strahl-Energiedichte  $u$  unverändert ist. Weil die Integranden endlich sind, müssen die beiden Integrale in Gleichung (21 auf der vorherigen Seite) im Grenzfall  $\Delta\nu$  und  $\Delta\Omega$  auf Null zurückgehen.

Daraus folgt, dass die zwei Doppel-Integral auf der rechten Seite der Gleichung (20 auf der vorherigen Seite) bei dieser Grenze verschwinden, ebenso wie die Doppel-Integrale in Gleichung (21 auf der vorherigen Seite). Wenn wir Gleichung (21 auf der vorherigen Seite) neu zu schreiben zu Gleichung (20 auf der vorherigen Seite), so erhalten wir

$$\lim_{\substack{\Delta\nu \rightarrow 0 \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} \frac{h}{c^2} \left( \frac{k_B T}{h} \right)^4 = \lim_{\substack{\Delta\nu \rightarrow 0 \\ \Delta\Omega \rightarrow 0}} \left\{ \left( cu - \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta\nu} d\nu D_\nu \right) \left[ \int_{\Delta\Omega} d\Omega_{\mathbf{k}} \int_{\Delta x} dx \frac{x^3}{e^x - 1} \right]^{-1} \right\} = \infty \quad (22)$$

Dies bedeutet, daß  $T$  unendlich wird, wenn eine feste Energie in einem einzigen Modus konzentriert ist. Diese Grenze erreicht das besondere Ensemble von einem reinen Zustand, das in Abschnitt 4.3 auf Seite 10 diskutiert wurde bei fester Energie mit null Entropie. Das Ensemble degeneriert zu einem einzigen Hilbert-Raum, mit einer genauen Anzahl Photonen  $N_{\mathbf{k}} = E/h\nu$  oder einem Feld-Modus modulo  $a_{\mathbf{k}} = \sqrt{E/h\nu}$ . In dieser Grenze haben die Durchschnittswerte des Ensembles keine statistische Unsicherheit. Der Modus füllt ganz den realen Raum und hat eine Wellenlänge und eine Richtung, eine unveränderliche absolute Amplitude und Energiedichte, aber eine zufällige Phase. Die Phase ist unabhängig von der Energie und hat keine Auswirkungen  $T$ . Dieses Ergebnis rechtfertigt das formal idealisierte Bild von Laser Strahlung mit unendlicher Temperatur.

Wenn Strahlung im Gleichgewicht mit der Materie ist, bekommen alle Temperaturen der Fourier-Teilräume den gleichen endlichen Wert,  $I_\nu$  kehrt zurück zu einer kompletten Schwarzkörper-Verteilung wie in Gleichung (18 auf der vorherigen Seite), die aber für alle Moden gültig ist. Wenn die Sache selektiv ist in seiner Frequenz oder Strahlrichtung ist die Änderung der Strahlung zum Gleichgewicht ebenfalls begrenzt. (Die Verteilung der Strahlungsintensität kann im allgemeinen durch die Lösung der Strahlungs-Übertragung-Gleichung gefunden werden, die den Strahlungs-Transport durch Materie beschreibt Mihalas und Weibel-Mihalas [1999].)

## 5.4 Temperatur gegenüber Intensität – klassischen Grenzen

Für ein festes und Frequenz-unabhängiges  $I_\nu \equiv I$ , werden sehr unterschiedliche Temperaturen bei verschiedenen Frequenzen gefunden. Wir formulieren Gleichung (12 auf Seite 12) und Gleichung (13 auf Seite 13) neu mit dem Kehrwert der mittleren Besetzungszahl,  $z \equiv h\nu^3/(c^2 I_\nu) = 1/n$ ,

$$k_B T_\nu = h \left( \frac{c^2 I}{h} \right)^{\frac{1}{3}} \mathcal{G}(z) \quad (23)$$

wobei

$$\mathcal{G}(z) = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\ln(1+z)} \quad (24)$$

Die Gewinn-Funktion  $\mathcal{G}(z)$  ist in Diagramm 1 auf Seite 22 dargestellt und bestimmt, wie Intensität und Frequenz die Temperatur der Strahlung bestimmen.  $\mathcal{G}(z)$  wird singulär

bei  $z = 0$ , mit einem Minimum bei ca.  $z = 15.8$  und wächst allmählich unbeschränkt mit zunehmenden  $z$ .

Offensichtlich "heiße" Strahlungsquellen für eine bestimmte Energie haben entweder niedrige oder sehr hohen Frequenzen. Zum Beispiel ist ein Laser im 600 nm-Bereich weniger "heiß" Watt für Watt, als ein Röntgen-Laser mit Wellenlängen von der Größenordnung von Angström. Dieses Ergebnis macht Sinn, weil Gleichung (13 auf Seite 13) einen konstanten Wert für einen Schwarz-Körper liefern muß, mit einem Minimum in der Mitte der Frequenzbereich. Alternativ zeigt die Kurve Punkte, wo die Schwarz-Körper-Verteilung eine konstante spezifische Intensität  $I$  überschreitet. Sie kreuzt bei zwei Frequenzen, außer wenn die Temperatur so weit sinkt, dass es gar keine Kreuzung gibt.

Die Grenzwerte von Gleichung (23 auf der vorherigen Seite) für Nieder- und Hochfrequenz können anders verstanden. Zählt man Photonen als Teilchen in Bezug auf ihrer Energien  $\epsilon = h\nu$ , ist die Beziehung  $n = [\exp(\epsilon/k_B T) - 1]^{-1}$  unabhängig von  $h$ . Im Grenzfall  $\epsilon \rightarrow \infty$  oder  $T \rightarrow 0$  geht  $n \rightarrow \exp(-\epsilon/k_B T)$ , die Maxwell-Boltzmann-Verteilung. Photons in dieser Grenze wirken wie die klassische Partikel und  $n$  tendiert zu kleinen Werten ( $z \rightarrow \infty$ ). Dann betrachten wir den Grenzwert von Gleichung (23 auf der vorherigen Seite) bei niedriger Frequenz oder hoher Intensität. Im Intensitätsterm ist die daraus resultierenden klassische Beziehung  $k_B T_\nu = (c^2/\nu^2)I$  unabhängig von  $h$  und ergibt sich aus einer Reihe von klassischen thermischen Oszillatoren. In der Rayleigh-Jeans-Grenze geht  $z \rightarrow 0$  und  $n \rightarrow \infty$ .

Photonen haben daher zwei verschiedene klassische Grenzen, bei hohen Frequenzen als Teilchen und bei niedrigen Frequenzen als klassisches Feld. Diese Feldgrenzen sind möglich, weil Photonen Bosonen sind und eine große Anzahl von Photonen koexistieren in dem selben Feld-Modus. Kohärente Zustände können konstruiert werden als Analoga zu klassischen Feldzuständen.

## 6 Die Temperatur eines realen Lasers

Obwohl Laser nicht unendliche Temperaturen haben, ist allen gemeinsam (auch Lasern kleiner Leistung), daß sie Temperaturen haben, die näher an denen des Sterninneren sind als den alltäglichen Materie-Temperaturen, die weit über den irrigen Bestimmungen nach der Gleichverteilung des Abschnitt 2 auf Seite 5 liegen. Laser arbeiten bis weit in die Hochleistung nach dem Rayleigh-Jeans-Grenzwert von Gleichung (12 auf Seite 12) und Gleichung (13 auf Seite 13), wobei  $k_B T_\nu = (c^2/\nu^2)I_\nu$ . Um diese sehr hohen Temperaturen zu sehen, muss die spezifische Intensität aus der Laserleistung  $P$  extrahiert werden.

Die Flussdichte  $F$  steht mit der spezifischen Intensität  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  im Zusammenhang durch

$$F = dP/dA = \int d\nu d\Omega_{\mathbf{k}}(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}})I_\nu(\hat{\mathbf{k}}). \quad (25)$$

Das Flächenelement ist  $dA = r^2 d\Omega_{\mathbf{r}}$  und  $\cos\theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}$  ist der Cosinus des Winkel zwischen dem Wellenvektor und dem Normalenvektor der Oberfläche  $\hat{\mathbf{r}}$ .  $d\Omega_{\mathbf{k}}$  ist das Modus-Raumwinkelelement und  $dA$  ist das Differential der Austrittsöffnung im Bereich des Laserstrahls.

Wenn  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  einen konstanten Abstrahlwinkel und Frequenz hätte, dann wäre  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}}) = I$  und die Leistung von jedem Punkt der Austrittsöffnung wäre über die Blende konstant,  $F = P/A$ . Die Leistung wäre

$$P = \pi AI \sin^2 \theta_{1/2} \quad (26)$$

wobei  $\theta_{1/2}$  ist der halbe Winkel des Abstrahlungskegels und  $A$  ist die Aperturfläche des Lasers.

Die spezifische Intensität möge in folgender Form faktorisiert sein:

$$I_\nu(\hat{\mathbf{k}}) = F_0 \Phi(\nu) \mathcal{D}(\hat{\mathbf{k}}). \quad (27)$$

Jede der Funktionen  $\Phi(\nu)$  und  $\mathcal{D}(\hat{\mathbf{k}})$  werde separat normiert auf eins:

$$\int_0^\infty d\nu \Phi(\nu) = \int d\Omega_{\mathbf{k}} (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \mathcal{D}(\hat{\mathbf{k}}) = 1 \quad (28)$$

Der Raumwinkel Variablen seien  $\theta$  und  $\varphi$ . Sie sind der polaren Winkel bzw. der azimutale Winkel gegenüber der Strahlachse.

Wir wollen typische Linienformen und Winkelverteilungen betrachten M. Sargent III und W. E. Lamb [1974], Silfvast [1996]. Die einfachste Linienform ist die Gaußsche Form infolge der Doppler Verbreiterung durch die thermische Bewegung im Laser-Gas,

$$\Phi(\nu) = \frac{\exp\left[-\frac{(\nu - \nu_0)^2}{(\Delta\nu_D)^2}\right]}{\sqrt{\pi}\Delta\nu_D} \quad (29)$$

und  $\Delta\nu_D$  ist die halbe Breite durch Dopplerverbreiterung:

$$\Delta\nu_D = \nu_0 \sqrt{\frac{2k_B T_{\text{gas}}}{mc^2}} \quad (30)$$

$m$  und  $T_{\text{gas}}$  sind die Masse und Temperatur der Gasmoleküle, die die Strahlung emittieren.

Die einfachste Winkelverteilung ist auch eine Gaußsche aus dem Laser-Hohlraum-Resonator in seinem Grund-Modus.

$$\mathcal{D}(\theta) = 2 \frac{\exp\left[-2\frac{\theta^2}{\theta_0^2}\right]}{\pi\theta_0^2}, \quad (31a)$$

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{+1} d(\cos\theta) \cos\theta \mathcal{D}(\theta) = 1 \quad (31b)$$

Die Verteilung ist azimutal symmetrisch um die vorwärts gerichtete Strahlrichtung mit  $\theta_0 \ll 1$  als Halb-Winkel, die  $e^{-2}$ -Potenz ist die Strahldivergenz. Die Strahldivergenz eines idealen Lasers ist beugungsbegrenzt an der Blende:  $\theta_0 = 2\lambda_0/\pi D$ , wobei  $D$  gleich dem Öffnungsdurchmesser ist.

Unsere Ergebnisse gelten für einen roten He-Ne-Gas-Laser mit der Wellenlänge  $\lambda_0 = 632.8$  nm bzw.  $\nu_0 = 4.741 \times 10^{14}$  Hz. Wir nehmen eine Leistung von  $P_0 = 1$  mW an. Diagramm 2 auf Seite 23 ist eine Darstellung der Strahlungstemperatur  $T(\nu, \theta)$  für  $D = 1$  mm und  $\Delta\nu_D = 0.9$  GHz, das entspricht  $T_{\text{Gas}} \simeq 390$  K. Die Strahl-Aperturfläche  $A$  ist  $\pi D^2/4 \simeq 8 \times 10^{-7}$  m<sup>2</sup> und die gesamte Flussdichte ist  $F_0 = P_0/A \simeq 1.3 \times 10^3$  W/m<sup>2</sup>. Die Strahl-Divergenz ist  $\theta_0 \simeq 0.4$  mrad.

Das Diagramm 3 auf Seite 24 zeigt die Strahlungstemperatur  $T(\nu = \nu_0, \theta)$  für mehrere Strahldurchmesser  $D$  und die entsprechenden Unterschiede der Strahl-Divergenzen  $\theta_0$  bei gleichem  $P_0$  und  $\Delta\nu_D$ . Die Spitzen-Temperatur ist

$$k_B T_\nu(\nu = \nu_0, \theta = 0) = \frac{2c^2 F_0}{\pi \sqrt{\pi} \nu_0^2 \theta_0^2 \Delta_D} \quad (32)$$

Sie ist unabhängig von  $D$ , weil die Normalisierung der Temperatur unabhängig von  $D$  ist:

$$T \sim \frac{F_0}{\theta_0^2} \sim \frac{P_0 \theta_0^{-2}}{A} \sim \theta_0^{-2} D^{-2} \sim D^2 D^{-2} \quad (33)$$

Nur die Form der Winkelverteilung hängt von  $D$  ab. Beachten Sie, dass  $T_\nu$  divergiert, wenn  $\Delta_D$  oder  $\theta_0 \rightarrow 0$ , was den reinen Zustand des Abschnitt 5.3 auf Seite 13 reproduziert.

Um die Strahlungs-Temperatur eines Lasers zu ermitteln, ist die Kenntnis der spezifischen Intensität  $I_\nu$  von dessen Licht erforderlich. Da Laser-Strahlung so intensiv ist, können wir die Rayleigh-Jeans-Grenze von Gleichung (13 auf Seite 13) benutzen:  $k_B T_\nu = (c^2/\nu^2) I_\nu$ . Das Finden von  $I_\nu$  erfordert das Machen separater Geometrie- und Frequenz-basierte Messungen. Ersteres erfordert eine Intensität Messung bei einer festen Frequenz, typischerweise mit einer Fotозelle. Letzteres bestimmt die spektralen Eigenschaften des Strahls Silfvast [1996], melles03, coherent03.

Wir legen einen Photodetektor bekannter Fläche  $A$  und Frequenzantwort oder Messeffizienz  $R(\nu)$  orthogonal zu den Strahl und zentriert entlang der Strahlachse ( $\theta = 0$ ), bei einem Abstand  $r$  vom Strahlaustritt.  $R(\nu)$  wird so normiert, dass sein Integral eins ist. Die Fotozellen-Messung einer eingehenden Leistung ist  $P$ :

$$P = 2\pi A \int_0^\infty d\nu \int_A d(\cos \theta) \cos \theta R(\nu) I_\nu(\nu, \theta) \quad (34)$$

mit der Definition Gleichung (25 auf Seite 16). Der Faktor von  $2\pi$  repräsentiert azimutale Integration rund um die Strahlachse und geht von einer axialen Symmetrie der Strahlintensität aus.

Wir machen die folgenden vereinfachenden Annahmen.

1. Wir nehmen an, dass das Frequenz- und Winkel-Profil gaußförmig sind, wie die Ausdrücke von Gleichung (29 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (31 auf der vorherigen Seite). Aus diesen Profilen können wir schließen, dass die Spitzen-Flussdichte  $F_0$  mit ein paar Messungen bestimmt werden kann.
2. Der Raumwinkel ist vom Photodetektor aus gesehen  $\Omega = A/4\pi r^2$ . Wir nehmen an, dass die Fotozelle selbst kreisförmig ist. Der Halb-Winkel  $\theta_A$  mit der Strahlachse ist gegeben durch  $\tan \theta_A = \sqrt{A/\pi r^2}$ .
3. Alle relevanten Winkel  $\theta_A$  und  $\theta_0$  sind klein. Dann ist  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ . Die Winkel-Integration wird:

$$\int_{\cos \theta_A}^1 d(\cos \theta) \cos \theta I_\nu(\nu, \theta) \doteq \int_0^{\theta_A} d\theta \theta I_\nu(\nu, \theta) \quad (35)$$

4. Die Frequenz-Integration kann vereinfacht werden, wenn wir davon ausgehen, dass  $R(\nu)$  über einen Bereich  $\Delta F$ ,  $R(\nu) = (\Delta F)^{-1}$  konstant ist. Wenn wir die Frequenz-Integration numerisch durchführen, ist diese Vereinfachung jedoch nicht erforderlich.

Wir können die Werte von  $\nu_0$ ,  $\Delta\nu_D$  und  $\theta_0$  verwenden, die durch den Laser-Hersteller angegeben werden. Mit zusätzlichen Instrumenten können wir diese Größen messen, jedoch sind solche Messungen schwieriger als die Leistungsmessung. Zum Beispiel können wir das Frequenz-Profil bestimmen und  $\nu_0$  und  $\Delta\nu_D$  durch Messung der spezifische Intensität als Funktion der Wellenlänge bestimmen. Die Lichtwellenlänge wird in der Regel mit einem Gitterspektrometer gemessen. Aber ein Gitter hat nicht die Frequenzauflösung, die für einen Laser benötigt wird, und stattdessen sollte ein Analysator mit Fabry-Perot-Interferometer benutzen werden. Wir können das Winkel-Profil bestimmen und dadurch  $\theta_0$  folgern, indem wir messen, wie die relative Intensität variiert, wenn wir den Abstand  $r$  Photodetektor Strahl-Blende variieren. Denn wenn wir den Photodetektor weiter von der Laser entfernen, umspannt er einen größeren Halb-Winkel  $\theta_A$  mit der Strahlachse.

Setzen wir diese abgeleiteten Werte und die angenommenen Vereinfachungen in Gleichung (34 auf der vorherigen Seite) ein, können wir das Winkel-Integral analytisch integrieren. Über die Frequenz kann numerisch integriert werden. Mit dem gemessenen  $P$ ,  $A$ ,  $\nu_0$ ,  $\Delta\nu_D$  und  $\theta_0$  können wir aus Gleichung (27 auf Seite 17), Gleichung (29 auf Seite 17), Gleichung (31 auf Seite 17) und Gleichung (34 auf der vorherigen Seite)  $F_0$  und  $I_\nu(\nu, \theta)$  folgern. Ihre Ergebnisse sollten ähnlich Diagramm 2 auf Seite 23 und Diagramm 3 auf Seite 24 sein, es sei denn, dass Ihr Laser nicht in seinem Grundfrequenz-Modus arbeitet. (Wenn der Photodetektor in absoluten Leistungseinheiten kalibriert ist, ist der Wert  $F_0$  auch in absoluten Einheiten. Wenn Sie  $P$  nicht in absoluten Einheiten messen können, können Sie trotzdem ein relatives Intensitätsprofil in Frequenz und Winkel messen, das auf die größte Intensität normiert wird. Die resultierende Temperatur auch in relativen Einheiten.)

## 7 Andere physikalische Konsequenzen

Die Nichtgleichgewichts-Strahlungstemperatur und ihr großer Wert bei Lasern haben wichtige theoretische und praktische Konsequenzen.

Betrachten wir die Entropie-Produktions-Dichte des Strahlungstransports (Materie-Strahlungs-Kopplung). Die Frage der Wechselwirkung mit der Strahlung ist eine lokale Temperaturerhöhung  $T$ . Diese Entropie-Produktions-Dichte kann bezogen werden auf die spezifische Intensität der Strahlungsenergie  $I_\nu$  und die spezifische Entropie-Intensität  $J_\nu$  Essex und Kennedy [1999]:

$$\begin{aligned}
-\frac{\dot{u} + \nabla \cdot \mathbf{F}}{T} + \dot{s}_r + \nabla \cdot \mathbf{H} &= \int d\nu d\Omega_{\mathbf{k}} \left\{ - \left( \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla I_\nu + \frac{1}{c} \dot{I}_\nu \right) \frac{1}{T} + \left( \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla J_\nu + \frac{1}{c} \dot{J}_\nu \right) \right\} \\
&= \int d\nu d\Omega_{\mathbf{k}} \left\{ \left( \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla I_\nu + \frac{1}{c} \dot{I}_\nu \right) \left( \frac{\partial J_\nu}{\partial I_\nu} - \frac{1}{T} \right) \right\} \\
&= \int d\nu d\Omega_{\mathbf{k}} \left\{ \left( \hat{\mathbf{k}} \cdot \nabla I_\nu + \frac{1}{c} \dot{I}_\nu \right) \left( \frac{1}{T_\nu(\hat{\mathbf{k}})} - \frac{1}{T} \right) \right\}
\end{aligned} \tag{36}$$

$\vec{H}$  und  $\vec{F}$  sind vom Strahlungsfluss die Vektor-Dichten der Entropie bzw. Energie und  $u$  und  $s_r$  sind eingestrahlte Dichten von Energie beziehungsweise Entropie. Die Strahlungstemperatur  $T_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  ist in Gleichung (7 auf Seite 9), Gleichung (13 auf Seite 13) und Gleichung (19 auf Seite 14) definiert. Der erste Term der ersten Zeile betrifft die Dichte der Entropieproduktion; die zweite und dritte sind die Strahlung Entropieproduktion Dichte.

Gleichung (36 auf der vorherigen Seite) ist positiv semidefinit und drückt den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik im Strahlungstransport aus. Die linke Faktor in den letzten Integranden von Gleichung (36 auf der vorherigen Seite) ist die Dichte der Energie-Übertragungsrate, die gleich und entgegengesetzt ist zu Materie und Strahlung Mihalas und Weibel-Mihalas [1999]. Bei streng thermischer Emission<sup>7</sup> entspricht dieser Faktor Netto dem Verlust oder der Zuführung von Energie an die Materie durch die Strahlenbündel in Richtung  $\hat{\mathbf{k}}$ . **Ohne weitere Energiequellen wird bei Zuführung von Energie die Materie wärmer, bei Verlust von Energie kühler.**

- Wenn  $T > T_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  ist, ist er positiv: Energie wird vom Feld auf die Materie übertragen, die Entropie-Produktion ist positiv.
- Wenn die Temperatur-Ungleichheit umgekehrt ist, ist das Vorzeichen dieses Faktors auch umgekehrt: Energie wird von der Materie auf das Feld übertragen und die Entropieproduktion bleibt positiv.
- Das Produkt im Integral ist nur Null, wenn Materie- und Strahlungs-Temperatur gleich sind und keine Übertragungen stattfinden.

Materie kann Wärme auf andere Materie auch durch zwei andere Möglichkeiten übertragen: durch Konvektion und Diffusion. Diese Mechanismen erfordern Materie-Materie-Kontakt und Gradienten in der intensiven Variablen, der Temperatur. Auf der anderen Seite hängt der Transport eingestrahler Energie nur von der Differenz der lokalen Temperaturen von Materie und Strahlung an einem einzigen Punkt im Raum ab. Selbst ein Niedrig-Energie-Laser ist sehr effektiv bei der Übertragung von Energie, weil seine Strahlungstemperatur so groß ist. Ein Energietransport, bei dem Strahlungs-Prozesse dominieren, wird durch Konvektion und Wärmeleitung minimal beeinflusst, wenn die Materie-Temperatur viel kleiner als die Strahlungstemperatur ist.

Praktische Konsequenzen dieser Ergebnisse sind die folgenden: Aufgrund der hohen Strahlungstemperatur dominiert der Strahlungstransport über andere, mehr destruktive Prozesse und unerwünschte Wärmeübertragung durch Konvektion und Wärmeleitung, wodurch Laser wirksame Instrumente für die Chirurgie sind. Es sind weder die Zeit noch die Energie groß genug um Konvektion oder Wärmeleitung wichtig zu machen. Die gesamte deponierte Energie ist klein und die Schnittflächen erleiden wenig Schaden. Die Kühlung von Atomen mit Lasern ist auch interessant im Lichte der Ergebnisse dieser Arbeit. In Abschnitt 4.3 auf Seite 10, werden zwei Fälle von Entropie-Entzug betrachtet. Aufzählung 2 auf Seite 18 repräsentiert die Kühlung der Laserstrahlung durch Atome, während Aufzählung 1 auf Seite 18 das Verhalten der Atome bei Kühlung betrachtet. Wenn bei den Atomen die Entropie abnimmt, entsprechend der Aufzählung 1 auf Seite 18, müssen auch ihre Temperatur und Energie abnehmen. Aber die Strahlung verhält sich nach Aufzählung 2 auf Seite 18 anders: ihre Temperatur sinkt auch, aber die Entropie nimmt zu statt ab, während ihre Leistung konstant bleibt.

Das klassische Feld von  $T_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  erhält man durch den Übergang  $h \rightarrow 0$  in Gleichung (13 auf Seite 13) und Konstantlassen alles anderen. Das Ergebnis  $k_B T_\nu(\hat{\mathbf{k}}) = h\nu n = c^2 I_\nu(\hat{\mathbf{k}})/\nu^2$  ist identisch mit der Hoch-Intensitäts- oder Niedrig-Frequenz-Grenze, unabhängig von  $H$ , wenn in Bezug auf  $I_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  geschrieben wird. Die Stärke der Flussdichte  $|(\vec{F})| = F$  ist

$$F = \int d\nu d\Omega_{\mathbf{k}} k^2 (\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) k_B T_\nu(\hat{\mathbf{k}}) \quad (37)$$

---

<sup>7</sup>Mit streng thermischer Emission ist hier gemeint, daß alle Anteile des Strahlungsfeldes (bei der Atmosphäre also Solarstrahlung, Gegenstrahlung und Ausstrahlung) betrachtet werden und andere Prozesse (Konvektion usw.) vernachlässigt werden.

Dieses Ergebnis kann mit der Antennen- oder Rausch-Temperatur verglichen werden, die vertraut sind bei Hochfrequenz-Elektromagnetismus Christiansen [1996]. In einem eindimensionalen System ist die Leistung  $P_{\text{Rausch}}$  eines reinen Rauschsignals assoziiert mit einer Temperatur  $T_{\text{Rausch}}$ :

$$P_{\text{Rausch}} = \int_0^{\infty} d\nu k_B T_{\text{Rausch}}(\nu) \quad (38)$$

Das Ergebnis Gleichung (37 auf der vorherigen Seite) ist das dreidimensionale Festkörper-Geometrie Analogon einer Hochfrequenz-Antenne oder eines Schaltkreises Gleichung (38). Es muss betont werden, dass die Antennen-Temperatur die Temperatur der Strahlung ist, nicht die des Antennen-Materials, genau so wie  $T_\nu(\hat{\mathbf{k}})$  nicht die Temperatur des Laser-Gases ist, sondern die des Laserlichts.

Die Argumente des Abschnitt 5 auf Seite 11 machen deutlich, dass die Rausch-Temperaturen, die in Gleichung (37 auf der vorherigen Seite) und Gleichung (38) definiert sind, eine zufällige Phasen-Verteilung für das Störsignal erfordern - das ist im Einklang mit der üblichen intuitiven Definition von Rauschen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen einige der physikalischen Auswirkungen der Temperatur für Nichtgleichgewichts-Systeme, insbesondere für die Strahlung und Laser-Licht. Weitere Folgen können durch die Anwendung der hier vorgestellten Techniken und Ergebnisse abgeleitet werden auf andere Aspekte der Strahlung, dem Strahlungstransport und von Lasern und beginnend mit den Referenzen geprüft werden.

## Danksagungen

Die Autoren erkennen die Gastfreundschaft und Reiz der Telluride Summer Research Center. R. S. B. erkennt die Unterstützung der National Science Foundation. Wir sind dankbar sowohl David Reitze (University of Florida) für aufklärende Lasermessungen als auch Sidney Bludman (University of Pennsylvania und DESY) für hilfreiche Kommentare. Der Gutachter verbesserte Form und Inhalt des Papers. Die Figuren wurden generiert mit Hilfe von MATLAB 6.

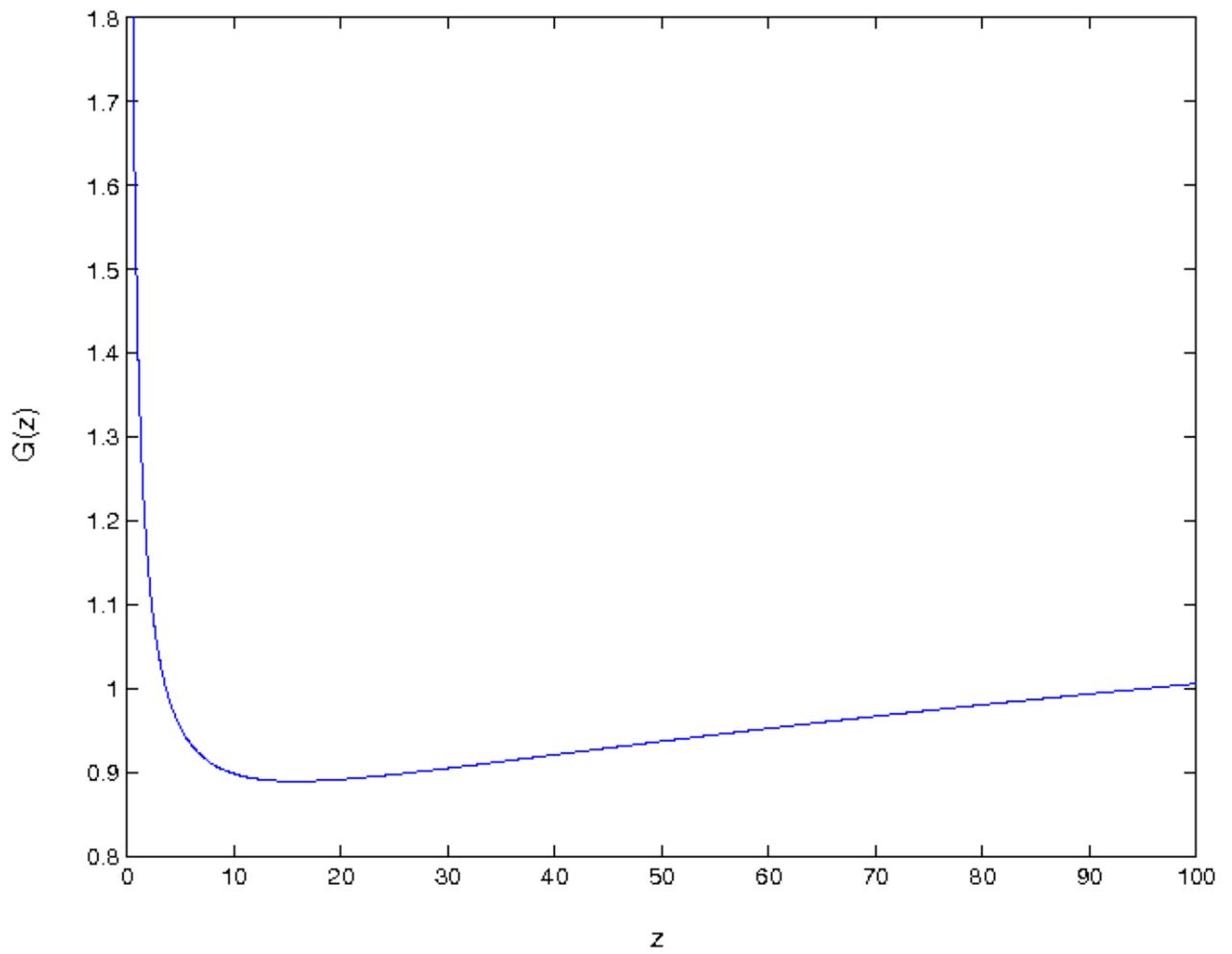


Abbildung 1: Die Verstärkungsfunktion  $\mathcal{G}(z)$  bezüglich Strahlungsintensität, Frequenz und Temperatur.

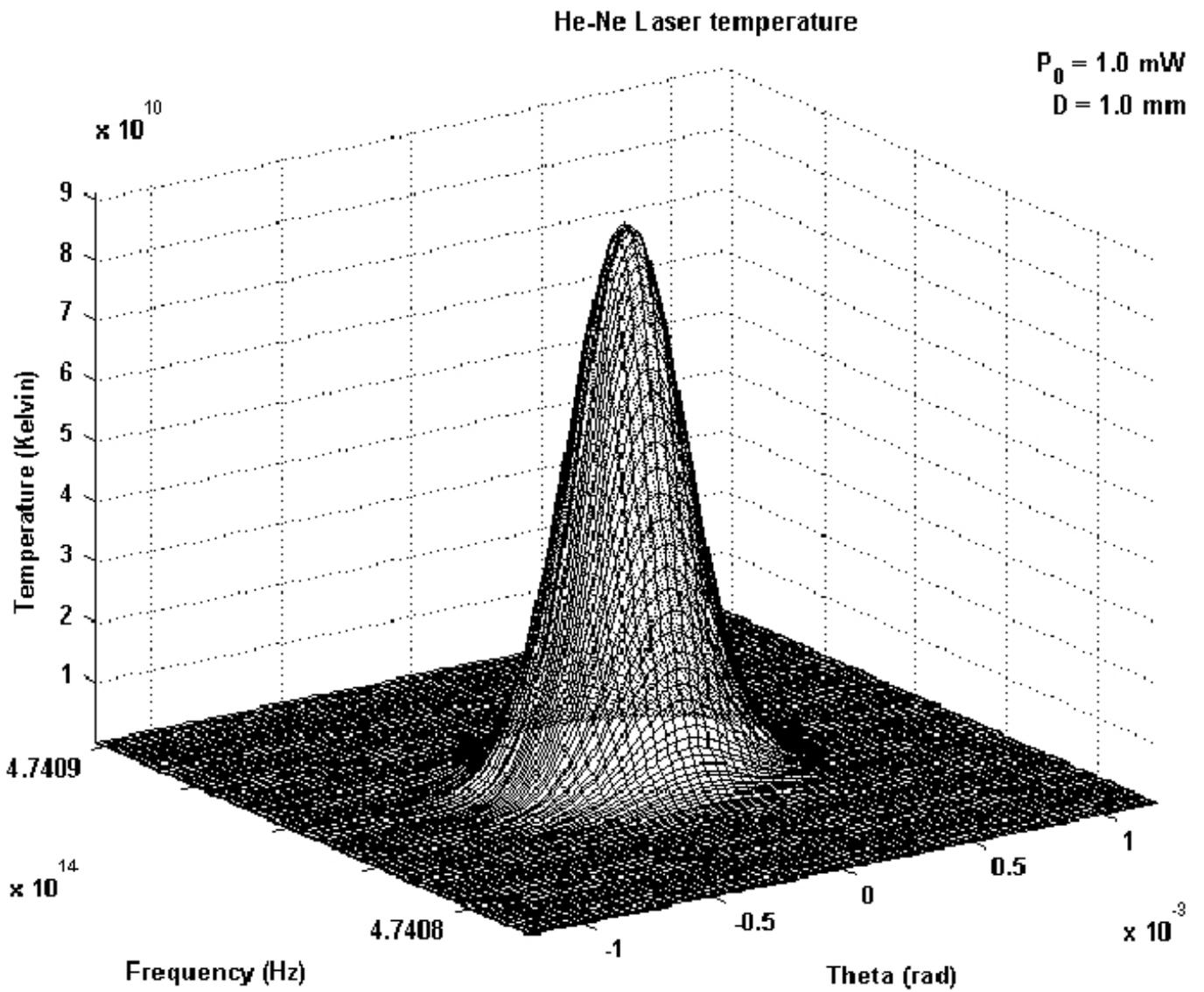


Abbildung 2: Die Helium-Neon-Laser Strahlungs-Temperatur  $T(\nu, \theta)$  für  $D = 1 \text{ mm}$ ,  $\Delta\nu_D = 0.9 \text{ GHz}$ , and  $P_0 = 1.0 \text{ mW}$ .

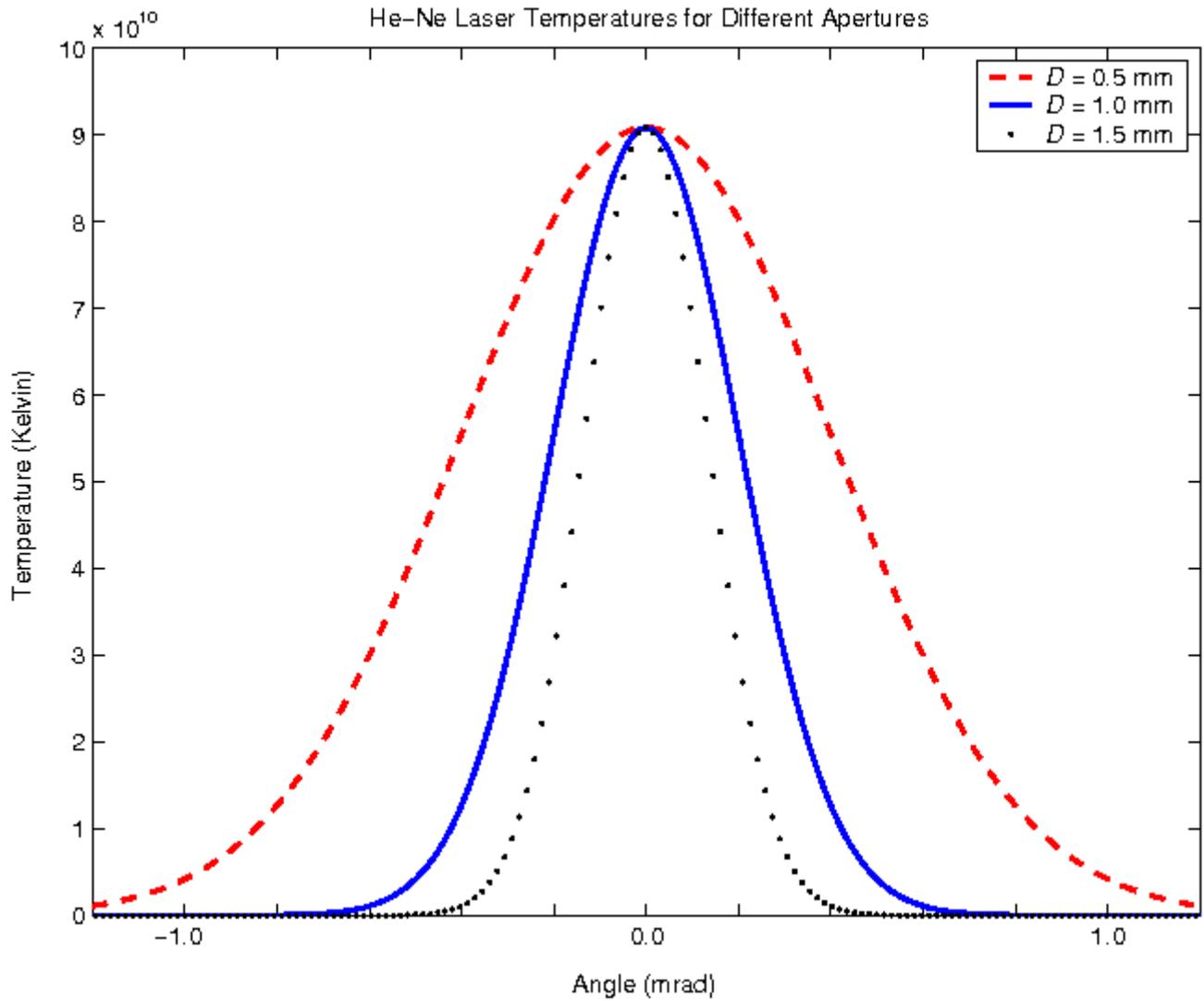


Abbildung 3: Die Helium-Neon-Laser Strahlungs-Temperatur  $T(\nu_0, \theta)$  für drei Aperturdurchmesser  $D$ . Die Intensitäts/Temperatur Profile werden mit wachsendem  $D$  schmaler und der Strahl wird mehr parallel.

## 8 Erwärmung und Lebensdauer

Zitat aus [Leßmann, 2000, S. 7f], welches direkt aus dem Vorhergehendem folgt:

Was ist nun die Ursache für den photoakustischen Effekt?

Bei Lichteinfall auf die Probe<sup>8</sup> wird ein Teil der Strahlung absorbiert. Je nach Wellenlänge des eingestrahnten Lichtes können Rotation, Schwingung oder elektronische Anregung in der Probe auftreten. Die selektive Anregung einzelner Übergänge führt zu einer Störung der Gleichgewichtsverteilung. Eine erneute Einstellung des Gleichgewichts (Relaxation) führt zu einer Temperaturerhöhung  $\Delta T$  der Probe (die absorbierte Energie wurde ja nicht wieder abgegeben). Hieraus resultiert ebenfalls eine Änderung des Druckes, welche als Messsignal am Mikrophon aufgefangen wird.

Wird der Strahl nur kurzzeitig eingeschaltet, so kommt es zunächst zu einer Störung des Gleichgewichts. Die höhere Temperatur stellt sich aber nach kurzer Zeit wieder ein. Das die Einstellung sehr schnell geht, wurde schon 1888 gefunden Natanson [1888]. Wie schnell das geht findet man in [Leßmann, 2000, S. 9], wo auch das Diagramm 4 erklärt wird:

In dem ... gezeigten Diagramm finden sich die mittleren Lebensdauern der angeregten Zustände für Rotation, Vibration und elektronische Anregung ( $\sim$ ), darunter sind jeweils die für die Relaxation benötigten Zeiten aufgetragen ( $R - R$ : Rotation-Rotationsaustausch, entspr.  $T$  für Translation und  $V$  für Schwingungen). Der schraffierte Bereich stellt die typische Ansprechzeit eines Mikrophons dar.

In der Atmosphäre wird ja der Strahl nicht kurzzeitig eingeschaltet, sondern die Strahlung ist ständig vorhanden und ändert sich langsam im Verhältnis zu den Lebensdauern. Die Abweichung vom Gleichgewicht ist deshalb unbedeutend.

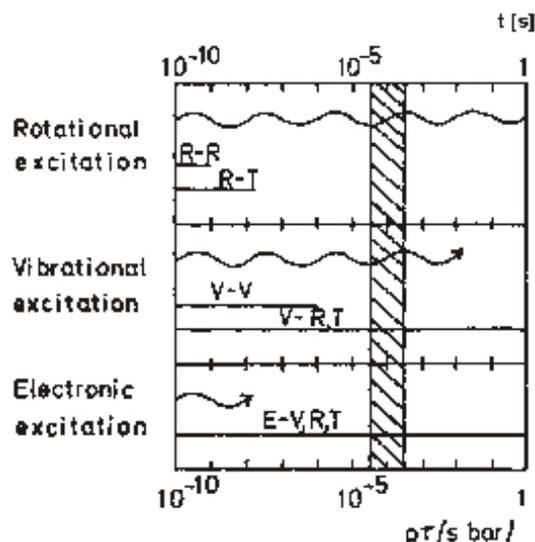


Abbildung 4: Lebensdauer angeregter Zustände (aus Leßmann [2000])

<sup>8</sup>Mit Probe ist das Gasvolumen gemeint, in dem die Absorption stattfindet

## 9 Höldersche Ungleichung

Für einen Planeten ohne Treibhausgase sind zwei Größen wesentlich: die durchschnittliche Temperatur, wenn die Temperatur auf der Oberfläche örtlich unterschiedlich ist (im Grenzfall überall gleich) und daß die ganze absorbierte Wärme wieder abgestrahlt wird.

Die örtliche Abstrahlung ist proportional zu  $T^4$ . Damit muß das Integral über  $T^4$  über die ganze Erdoberfläche  $EO^9$  eine Konstante sein, die mit  $T_s$  beschrieben wird (und zugleich wird  $T_s$  damit definiert):

$$EO \cdot T_s^4 = \int_{EO} T^4 d\mu \quad (39)$$

Die Durchschnittstemperatur  $\bar{T}$  ergibt sich als Integral über die örtlichen Temperaturen, dividiert durch die Mittelungsfläche

$$\bar{T} = \frac{\int_{EO} T d\mu}{EO} = \int_{EO} \frac{T}{EO} d\mu \quad (40)$$

Zwischen Gleichung (39) und Gleichung (40) kann eine Beziehung hergestellt werden durch die Höldersche Ungleichung, die z.B. von [Gerlich und Tschuschner, 2009, p. 64] und auch in [Höllig, 2006] zitiert wird:

$$\int_X fg d\mu \leq \left\{ \int_X f^p d\mu \right\}^{1/p} \cdot \left\{ \int_X g^q d\mu \right\}^{1/q} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad (41)$$

Dabei sind  $f, g$  zwei nichtnegative Funktionen;  $p$  und  $q$  natürliche Zahlen. Die Gleichheit in Gleichung (41) gilt nur für  $f = g = \text{const.}$

Im Fall von Gleichung (39) und Gleichung (40) wählt man zweckmäßig:

$$p = 4, \quad q = 4/3, \quad f(\mu) = T, \quad g(\mu) \equiv \frac{1}{EO}, \quad X = EO \quad (42)$$

Damit wird:

$$\int_{EO} T \cdot \frac{1}{EO} d\mu \leq \left\{ \int_{EO} T^4 d\mu \right\}^{1/4} \cdot \left\{ \int_{EO} \left( \frac{1}{EO} \right)^{4/3} d\mu \right\}^{3/4} \quad (43)$$

In Gleichung (43) werden nun Gleichung (40) und Gleichung (39) eingesetzt und das rechte Integral auf der rechten Seite gelöst (was einfach ist, da der Integrand eine Konstante ist):

$$\bar{T} \leq \{EO \cdot T_s^4\}^{1/4} \cdot \left\{ \left( \frac{1}{EO} \right)^{4/3} \cdot EO \right\}^{3/4} = T_s \cdot \underbrace{\left\{ (EO)^{1/4} \cdot \left( \frac{1}{EO} \right) \cdot EO^{3/4} \right\}}_{\equiv 1} \quad (44)$$

$$\bar{T} \leq T_s$$

---

<sup>9</sup>Dabei tritt  $EO$  in zwei Bedeutungen auf: einmal als Fläche der Erdoberfläche und einmal als Integrationsgebiet, das die gesamte Erdoberfläche bedeutet. Dementsprechend ist  $d\mu$  ein Flächenelement der Erdoberfläche.

Die Oberflächentemperatur einer Erde ohne Treibhausgase wird meistens als einheitlich vorausgesetzt und mit  $-18^\circ\text{C}$  berechnet. Diese  $-18^\circ\text{C}$  ist entsprechend der vorigen Herleitung die Größe  $T_s$ : bei identischen Temperaturen auf der Erdoberfläche gilt in  $\bar{T} \leq T_s$  das Gleichheitszeichen entsprechend der Hölderschen Ungleichung (Gleichung (41 auf der vorherigen Seite)). Aus Gleichung (44 auf der vorherigen Seite) ist zu ersehen, daß in der Realität die Durchschnittstemperatur einer treibhausgaslosen Erde kühler als die  $-18^\circ\text{C}$  wäre, weil die Temperaturen mit Sicherheit nicht einheitlich sein können, weil z.B. die Einstrahlung ungleichmäßig ist und der horizontale Wärmetransport fehlt.

## 10 Erzeugungs- und Vernichtungsoperator . . . Wikipedia

Obwohl in schwarz, ist dieser Abschnitt zugefügt, ohne Bestandteil des Papers von Essex u.a. zu sein.

### 10.1 Vorbemerkung

Die **Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren** sind der Kern einer eleganten Lösung der Schrödingergleichung des harmonischen Oszillators. Diese Operatoren können auch dazu benutzt werden, gewisse Probleme mit quantenmechanischem Drehimpuls einfacher zu lösen. Ferner finden die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren Verwendung bei der Quantisierung von Feldern (der sogenannten zweiten Quantisierung oder Besetzungszahl-Darstellung).

Es gibt eine Vielzahl alternativer Bezeichnungen wie **Leiteroperatoren**, **Kletteroperatoren**, **Aufsteige-** und **Absteigeoperatoren** sowie **Hebe-** und **Senkoperatoren**. Statt »Erzeugungsoperator« wird manchmal auch **Erschaffungsoperator** verwendet. Im deutschsprachigen Raum werden darüber hinaus auch die Operatoren  $\sigma_+$  und  $\sigma_-$ , die die Zustände eines Atoms ändern, als Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren bezeichnet.

Das Problem des harmonischen Oszillators in der Quantenmechanik lässt sich mithilfe der Methode der Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren behandeln, die auch *algebraische Methode* genannt wird. Sie wurde hauptsächlich von Paul Dirac entwickelt. Für diesen Lösungsweg definiert man zwei Operatoren  $\hat{a}$  und  $\hat{a}^\dagger$ , die einem Oszillator jeweils ein Energiequant  $\hbar\omega$  entziehen oder hinzufügen. Man nennt sie deswegen Vernichtungs- und Erzeugungsoperator

Das Zirkumflex über dem  $a$  symbolisiert, dass es sich dabei um einen Operator handelt. Damit gelten nicht dieselben Rechenregeln wie für Skalare, denn die Reihenfolge von Operatoren lässt sich beispielsweise im Allgemeinen nicht vertauschen. Im Folgenden wird auf das Zirkumflex zugunsten der Übersichtlichkeit verzichtet. Alle lateinischen Großbuchstaben, mit Ausnahme des E, sind Operatoren.

### 10.2 Definition

Man definiert den Erzeugungsoperator  $a^\dagger$  und den dazu adjungierten Vernichtungsoperator  $a$  über folgende Vertauschungsrelationen mit dem *Besetzungszahloperator*  $N := a^\dagger a$

$$[N, a] = -a, \quad [N, a^\dagger] = a^\dagger \quad (45)$$

Der Besetzungszahloperator  $N$  ist ein hermitescher Operator und hat daher reelle Eigenwerte  $n$ . Die zugehörige Eigenwertgleichung lautet, wobei  $|n\rangle$  Fock-Zustände sind

$$N |n\rangle = n |n\rangle \quad (46)$$

Die Besetzungszahl  $n$  ist eine nichtnegative ganze Zahl, also  $n \in \mathbb{N}_0$ . Bei Fermionen<sup>10</sup> ergibt sich hier noch eine Einschränkung auf die Werte 0 und 1.

Durch Anwendung von  $a^\dagger$  bzw.  $a$  auf den Zustand  $|n\rangle$  erhält man den darüber- bzw. den darunterliegenden Zustand ([also ein Photon mehr oder eins weniger](#))

$$a^\dagger |n\rangle = c_n^+ |n+1\rangle \quad (47)$$

$$a |n\rangle = c_n^- |n-1\rangle \quad (48)$$

---

<sup>10</sup>Photonen sind Bosonen (keine Fermionen), deshalb betrifft diese Einschränkung keine Photonen

Die Konstanten  $c_n^+$  und  $c_n^-$  sind davon abhängig, ob  $a$  und  $a^\dagger$  die Kommutator- oder Antikommutator-Vertauschungsrelation erfüllen.

### 10.2.1 Details

Im Folgenden werden verschiedene Eigenschaften von  $N$  abgeleitet. Die Eigenzustände  $|n\rangle$  seien normiert.

- Der Besetzungszahloperator ist hermitesch, also selbstadjungiert

$$N^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a^{\dagger\dagger} = a^\dagger a = N \quad (49)$$

Somit hat  $N$  reelle Eigenwerte, die Besetzungszahlen  $n$ .

- Die Eigenwerte sind nicht negativ:  $n \geq 0$

$$n = \langle n|N|n\rangle = \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle an|an\rangle = \|a|n\rangle\|^2 \geq 0 \quad (50)$$

Die Ungleichung folgt aus der Tatsache, dass die Norm eines Vektors nicht-negativ ist.

- Der kleinste Eigenwert ist 0 Der Zustand  $|0\rangle$  ist ein Vektor im Hilbertraum und darf nicht mit dem Nullvektor verwechselt werden, sondern wird lediglich mit der Zahl 0 nummeriert.

$$a^\dagger a |0\rangle = 0 |0\rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle 0|0\rangle = 1 \quad (51)$$

Wegen  $n \geq 0$  muss gelten:  $a|0\rangle = 0$ . Wendet man also auf den niedrigsten Zustand den Absteigeoperator an, so erhält man den Nullvektor. Dies lässt sich aber nicht umkehren: Durch Anwendung von  $a^\dagger$  auf den Nullvektor erhält man nicht den Grundzustand sondern wieder den Nullvektor.

- Die Eigenwerte sind ganzzahlig:  $n \in \mathbb{N}_0$

Angenommen die Eigenwerte wären nicht ganzzahlig, so lassen sich ausgehend von einem Eigenzustand durch mehrmalige Anwendung des Absteigeoperators Eigenzustände finden, die negative Eigenwerte besitzen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Bedingung  $n \geq 0$ . Bei ganzzahligen Eigenwerten erreicht man irgendwann den Grundzustand und durch nochmaliges Anwenden den Nullvektor; ab hier bricht automatisch die Leiter ab.

- Ist  $n$  Eigenwert, dann auch  $n + 1$

$$\begin{aligned} Na^\dagger |n\rangle &= (a^\dagger N + [N, a^\dagger]) |n\rangle = (a^\dagger N + a^\dagger) |n\rangle \\ &= a^\dagger (N + 1) |n\rangle = a^\dagger (n + 1) |n\rangle = (n + 1) a^\dagger |n\rangle \end{aligned} \quad (52)$$

Wenn  $a^\dagger |n\rangle$  ungleich dem Nullvektor ist, erhält man somit einen neuen Eigenwert  $(n + 1)$ .

$a^\dagger |n\rangle$  ist also Eigenzustand zu  $N$  mit Eigenwert  $(n + 1)$  und somit proportional zu  $|n + 1\rangle$

$$a^\dagger |n\rangle = c_n^+ |n + 1\rangle$$

- Ist  $n > 0$  Eigenwert, dann auch  $n - 1$

$$\begin{aligned} Na |n\rangle &= (aN + [N, a]) |n\rangle = (aN - a) |n\rangle = a(N - 1) |n\rangle = a(n - 1) |n\rangle \\ &= (n - 1) a |n\rangle \end{aligned} \quad (53)$$

Wenn  $a |n\rangle$  ungleich dem Nullvektor ist, erhält man somit einen neuen Eigenwert  $(n - 1)$ .  
 $a |n\rangle$  ist also Eigenzustand zu  $N$  mit Eigenwert  $(n - 1)$  und somit proportional zu  $|n - 1\rangle$

$$a |n\rangle = c_n^- |n - 1\rangle$$

### 10.3 Bosonische Kletteroperatoren

Im bosonischen Fall erfüllen  $a$  und  $a^\dagger$  die Kommutator-Vertauschungsrelationen:

$$[a, a^\dagger] = 1, \quad [a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0 \quad (54)$$

Somit

$$a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n + 1} |n + 1\rangle \quad (55)$$

$$a |n\rangle = \sqrt{n} |n - 1\rangle \quad (56)$$

Im bosonischen Fall können die Besetzungszahlen  $n$  beliebig groß werden:  $n \in \mathbb{N}_0$ .

#### 10.3.1 Details

- Zunächst ist zu prüfen, ob die obigen Voraussetzungen erfüllt werden

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = \underbrace{[a^\dagger, a]}_{-1} a + a^\dagger \underbrace{[a, a]}_0 = -a \quad (57)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = \underbrace{[a^\dagger, a^\dagger]}_0 a + a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_1 = a^\dagger \quad (58)$$

- Mit  $a^\dagger$  lässt sich der nächste über  $|n\rangle$  liegende Zustand konstruieren  $a^\dagger |n\rangle = c |n + 1\rangle$ .  
Der Faktor  $c$  ergibt sich aus folgender Rechnung mit dem Kommutator  $aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ :

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \|c |n + 1\rangle\|^2 = \|a^\dagger |n\rangle\|^2 = \langle a^\dagger n | a^\dagger n \rangle = \langle n | aa^\dagger | n \rangle \\ &= \langle n | a^\dagger a + 1 | n \rangle = \langle n | N + 1 | n \rangle = n + 1 \end{aligned} \quad (59)$$

$c = \sqrt{n + 1} e^{i\varphi}$ , die Phase  $\phi$  kann aber vernachlässigt werden, sodass  $c = \sqrt{n + 1}$ .

- Mit  $a$  lässt sich der unter  $|n\rangle$  liegende Zustand konstruieren  $a |n\rangle = c |n - 1\rangle$ . Der Faktor  $c$  ergibt sich aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \|c |n - 1\rangle\|^2 = \|a |n\rangle\|^2 \\ &= \langle an | an \rangle = \langle n | a^\dagger a | n \rangle = \langle n | N | n \rangle = n \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{n} \end{aligned} \quad (60)$$

- Alle Eigenzustände lassen sich vom Grundzustand ausgehend konstruieren

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (61)$$

Auf diese Weise erhält man einen vollständigen diskreten Satz von Eigenzuständen

## 10.4 Fermionische Kletteroperatoren

Photonen sind Bosonen, für dieses Paper interessiert also dieser Abschnitt über Fermionen nicht.

Im fermionischen Fall erfüllen  $a$  und  $a^\dagger$  die Anti-Kommutator-Vertauschungsrelationen

$$\{a, a^\dagger\} = 1, \quad \{a, a\} = \{a^\dagger, a^\dagger\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = a^{\dagger 2} = 0 \quad (62)$$

Somit

$$a^\dagger |n\rangle = (1-n) |n+1\rangle \quad (63)$$

$$a |n\rangle = n |n-1\rangle \quad (64)$$

Im fermionischen Fall können die Besetzungszahlen  $n$  nur die Werte 0 oder 1 annehmen.

### 10.4.1 Details

- Mit  $aa = 0$  und  $a^\dagger a^\dagger = 0$  ist  $N^2 = N$

$$N^2 = a^\dagger a a^\dagger a = a^\dagger \underbrace{\{a, a^\dagger\}}_1 - a^\dagger a a = a^\dagger a - \underbrace{a^\dagger a^\dagger}_0 \underbrace{aa}_0 = a^\dagger a = N \quad (65)$$

Der Besetzungszahloperator hat also nur die Eigenwerte 0 und 1 und die Eigenzustände  $|0\rangle$  und  $|1\rangle$ :

$$n^2 |n\rangle = N^2 |n\rangle = N |n\rangle = n |n\rangle \quad \Rightarrow \quad n^2 = n \quad \Rightarrow \quad n \in \{0, 1\} \quad (66)$$

- Zunächst ist zu prüfen, ob die obigen Voraussetzungen erfüllt werden

$$[N, a] = [a^\dagger a, a] = \underbrace{[a^\dagger, a]}_{2a^\dagger a - \{a, a^\dagger\}} a + a^\dagger \underbrace{[a, a]}_0 = 2a^\dagger \underbrace{aa}_0 - \underbrace{\{a, a^\dagger\}}_1 a = -a \quad (67)$$

$$[N, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = \underbrace{[a^\dagger, a^\dagger]}_0 a + a^\dagger \underbrace{[a, a^\dagger]}_{\{a, a^\dagger\} - 2a^\dagger a} = a^\dagger \underbrace{\{a, a^\dagger\}}_1 - 2 \underbrace{a^\dagger a^\dagger}_0 a = a^\dagger \quad (68)$$

- Mit  $a^\dagger$  lässt sich der nächste über  $|n\rangle$  liegende Zustand konstruieren  $a^\dagger |n\rangle = c |n+1\rangle$ . Der Faktor  $c$  ergibt sich aus folgender Rechnung mit dem Anti-Kommutator  $aa^\dagger + a^\dagger a = 1$ :

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \|c |n+1\rangle\|^2 = \|a^\dagger |n\rangle\|^2 \\ &= \langle a^\dagger n | a^\dagger n \rangle = \langle n | a a^\dagger | n \rangle \\ &= \langle n | 1 - a^\dagger a | n \rangle = \langle n | 1 - N | n \rangle = 1 - n \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{1-n} \end{aligned} \quad (69)$$

Da  $n$  nur 0 oder 1 sein kann, ist  $c = \sqrt{1-n} = 1-n = \delta_{0,n}$  (dabei ist  $\delta_{i,j}$  das Kronecker-Delta).

- Mit  $a$  lässt sich der unter  $|n\rangle$  liegende Zustand konstruieren  $a|n\rangle = c|n-1\rangle$ . Der Faktor  $c$  ergibt sich aus folgender Rechnung

$$\begin{aligned} |c|^2 &= \|c|n-1\rangle\|^2 = \|a|n\rangle\|^2 = \langle an|an\rangle \\ &= \langle n|a^\dagger a|n\rangle = \langle n|N|n\rangle = n \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{n} \end{aligned} \quad (70)$$

Da  $n$  nur 0 oder 1 sein kann, ist  $c = \sqrt{n} = n = \delta_{1,n}$ .

- Alle Eigenzustände lassen sich vom Grundzustand ausgehend konstruieren

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}} a^\dagger |n-1\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle, \quad n \in \{0, 1\} \quad (71)$$

Auf diese Weise erhält man einen vollständigen diskreten Satz von Eigenzuständen

## 10.5 Beispiel für bosonische Kletteroperatoren: Harmonischer Oszillator

Der Hamiltonoperator  $H$  des harmonischen Oszillators lautet

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2} \quad (72)$$

$P$  Impulsoperator,  $Q$  Ortsoperator,  $m$  Masse,  $\omega$  Eigenfrequenz  
Im Folgenden ist die stationäre Schrödingergleichung zu lösen

$$H |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle \quad (73)$$

$E_n$  Energieeigenwert,  $|\Psi_n\rangle$  Energieeigenzustand

### 10.5.1 Hamiltonoperator umformen

Der Hamiltonoperator lässt sich umformen

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{m\omega^2 Q^2}{2} = \hbar\omega \left( \frac{P^2}{2\hbar m\omega} + \frac{m\omega Q^2}{2\hbar} \right) \quad (74)$$

Es werden zwei neue Operatoren definiert

$$\tilde{P} := \frac{P}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \quad \text{und} \quad \tilde{Q} := \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} Q \quad (75)$$

Der Hamiltonoperator ausgedrückt mit den neuen Operatoren

$$H = \hbar\omega \left( \tilde{P}^2 + \tilde{Q}^2 \right) \quad (76)$$

Man versucht nun, den Inhalt der Klammer als Produkt zu schreiben, also ( $i$  ist die imaginäre Einheit)

$$(u - iv)(u + iv) = u^2 + v^2 + iuv - ivu = u^2 + v^2 \quad (77)$$

Da aber  $u$  und  $v$  Operatoren sind, die nicht vertauschen, gilt hier das letzte Gleichheitszeichen nicht. Um zwei Operatoren miteinander zu vertauschen, ist der Kommutator vonnöten:  $\tilde{Q}\tilde{P} = \tilde{P}\tilde{Q} - [\tilde{P}, \tilde{Q}]$

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega \left( \tilde{Q}^2 + \tilde{P}^2 \right) \\
&= \hbar\omega \left( \tilde{Q}^2 + \tilde{P}^2 + i [\tilde{Q}, \tilde{P}] - i [\tilde{Q}, \tilde{P}] \right) \\
&= \hbar\omega \left( \tilde{Q}^2 + \tilde{P}^2 + i\tilde{Q}\tilde{P} - i\tilde{P}\tilde{Q} - i [\tilde{Q}, \tilde{P}] \right) \\
&= \hbar\omega \left( (\tilde{Q} - i\tilde{P})(\tilde{Q} + i\tilde{P}) - i [\tilde{Q}, \tilde{P}] \right)
\end{aligned} \tag{78}$$

Der Kommutator  $[\tilde{Q}, \tilde{P}]$  kann auf den Kommutator der ursprünglichen Operatoren  $Q$  und  $P$  zurückgeführt werden

$$[\tilde{Q}, \tilde{P}] = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}} \underbrace{[Q, P]}_{i\hbar} = \frac{i}{2} \tag{79}$$

Der Hamiltonoperator sieht nun folgendermaßen aus

$$H = \hbar\omega \underbrace{(\tilde{Q} - i\tilde{P})}_{a^\dagger} \underbrace{(\tilde{Q} + i\tilde{P})}_a + \frac{1}{2}\hbar\omega \tag{80}$$

Jetzt werden die beiden Leiteroperatoren definiert

$$a^\dagger := \tilde{Q} - i\tilde{P} \quad \text{Erzeugungsoperator} \tag{81}$$

$$a := \tilde{Q} + i\tilde{P} \quad \text{Vernichtungsoperator} \tag{82}$$

Häufig werden sie auch als  $a_+$  und  $a_-$  geschrieben. Man beachte, dass die Leiteroperatoren nicht hermitesch sind, da  $a \neq a^\dagger$ .

Die Leiteroperatoren ausgedrückt durch Ortsoperator  $Q$  und Impulsoperator  $P$

$$a^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( Q - i\frac{1}{m\omega}P \right) \tag{83}$$

$$a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left( Q + i\frac{1}{m\omega}P \right) \tag{84}$$

Mit den Leiteroperatoren schreibt sich der Hamiltonoperator

$$H = \hbar\omega \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \tag{85}$$

### 10.5.2 Eigenschaften der Erzeuger und Vernichter

Zu bestimmen ist noch der Kommutator aus den beiden Leiteroperatoren

$$\begin{aligned}
[a, a^\dagger] &= aa^\dagger - a^\dagger a = (\tilde{Q} + i\tilde{P})(\tilde{Q} - i\tilde{P}) - (\tilde{Q} - i\tilde{P})(\tilde{Q} + i\tilde{P}) \\
&= 2i \left( \tilde{P}\tilde{Q} - \tilde{Q}\tilde{P} \right) = 2i \underbrace{[\tilde{P}, \tilde{Q}]}_{-i/2} = 1
\end{aligned} \tag{86}$$

Da außerdem  $[a, a] = [a^\dagger, a^\dagger] = 0$  gilt, handelt es sich bei den Kletteroperatoren des harmonischen Oszillators um *bosonische Kletteroperatoren*. Somit gelten alle obigen Eigenschaften für bosonische Kletteroperatoren.

Das Produkt  $a^\dagger a$  definiert den *Besetzungszahloperator*:

$$N = a^\dagger a \quad (87)$$

Der Besetzungszahloperator  $N$  ist ein hermitescher Operator und hat daher reelle Eigenwerte, die Besetzungszahlen  $n$ . Die Eigenzustände sind Fock-Zustände oder Besetzungszustände. Die zugehörige Eigenwertgleichung lautet

$$N |n\rangle = n |n\rangle, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (88)$$

### 10.5.3 Lösung des Eigenwertproblems

Der Hamiltonoperator lässt sich durch den Besetzungszahloperator ausdrücken

$$H = \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) \quad (89)$$

Das Eigenwertproblem  $H |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle$  lässt sich auf die Eigenwertgleichung des Besetzungszahloperators  $N |n\rangle = n |n\rangle$  zurückführen.

$$\hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) |\Psi_n\rangle = E_n |\Psi_n\rangle, \quad \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle \quad (90)$$

Die Eigenzustände von  $N$  sind auch Eigenzustände von  $H$ , da  $[H, N] = 0$ . Die Eigenwerte des Hamiltonoperators ergeben sich aus den Eigenwerten des Besetzungszahloperators  $N$ :

$$E_n = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \quad \text{und} \quad |\Psi_n\rangle = |n\rangle \quad (91)$$

Eine besonders wichtige Eigenschaft der Kletteroperatoren ist diese

$$a^\dagger |\Psi_n\rangle = \sqrt{n+1} |\Psi_{n+1}\rangle \quad (92)$$

$$a |\Psi_n\rangle = \sqrt{n} |\Psi_{n-1}\rangle \quad (93)$$

Ist  $|\Psi_n\rangle$  eine Lösung der Schrödingergleichung für die Energie  $E_n$ , so ist  $a^\dagger |\Psi_n\rangle$  eine Lösung für die Energie  $E_n + \hbar\omega$  und  $a |\Psi_n\rangle$  eine Lösung für die Energie  $E_n - \hbar\omega$ . Das bedeutet, dass man aus einer Lösung alle Lösungen erhalten kann, indem man einfach den Erzeugungs- oder Vernichtungsoperator auf diese Lösung anwendet. Dadurch wird eine neue Lösung für das benachbarte Energieniveau erzeugt, das um die Energie  $\hbar\omega$  verschoben ist.

Da der Besetzungszahloperator keine negativen Eigenwerte hat, können auch keine negativen Energieeigenwerte existieren. Es gibt also für die minimale Besetzungszahl  $n = 0$  eine Lösung  $|\Psi_0\rangle$ , die auf einem minimalen Energieniveau sitzt (Nullpunktsenergie):

$$E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega \quad (94)$$

Im Zustand  $|\Psi_n\rangle$  setzt sich die Energie  $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$  zusammen aus der Nullpunktsenergie  $\hbar\omega/2$  und  $n$  Energiequanten der Größe  $\hbar\omega$ . Die Wirkung von  $a^\dagger$  überführt das System in einen Zustand mit der um  $\hbar\omega$  erhöhten Energie. Dies kann man als Erzeugung eines zusätzlichen Energiequants interpretieren, was den Namen *Erzeugungsoperator* verständlich

macht. Analog überführt der Operator  $a$  das System in einen um ein Energiequant reduzierten Zustand. Es wird also ein Energiequant vernichtet, deswegen *Vernichtungsoperator*. Die Eigenwerte des Operators  $N$  geben an, wieviele Energiequanten in einem Eigenzustand angeregt sind. Die Besetzung eines Zustandes mit  $n$  Energiequanten erklärt den Namen *Besetzungszahloperator*.

### 10.5.4 Eigenfunktionen in Ortsdarstellung

Wendet man also auf den niedrigsten Zustand den Absteigeoperator an, so erhält man den Nullvektor  $a|\Psi_0\rangle = 0$ . Dies lässt sich aber nicht umkehren: Durch Anwendung von  $a^\dagger$  auf den Nullvektor erhält man nicht den Grundzustand sondern wieder den Nullvektor  $a^\dagger a|\Psi_0\rangle = 0$ . Dies liefert eine Gleichung für den Grundzustand:

$$0 = a|0\rangle = \left(\tilde{Q} + i\tilde{P}\right)|\Psi_0\rangle = \left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}Q + i\frac{P}{\sqrt{2\hbar m\omega}}\right)|\Psi_0\rangle \quad (95)$$

In der Ortsdarstellung kann man obige Operatorgleichung als Differentialgleichung darstellen und lösen:  $P = -i\hbar\frac{d}{dx}$  und  $Q = x$

$$\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x + \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)\Psi_0(x) = 0$$

liefert normiert

$$\Psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2\right)$$

Durch Anwendung des Aufsteigeoperators auf die Lösung des Grundzustands erhält man alle höheren Eigenfunktionen:

$$|\Psi_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}a^\dagger|\Psi_{n-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n|\Psi_0\rangle \quad (97)$$

In Ortsdarstellung erhält man somit:

$$\Psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}x - \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\frac{d}{dx}\right)^n\Psi_0(x) \quad (98)$$

## 10.6 Matrixdarstellung bosonischer Kletteroperatoren

Die Eigenzustände des Besetzungszahloperators  $|n\rangle$  bilden ein vollständiges Orthonormalsystem. Mit Hilfe dieser Hilbertraumbasis soll nun eine Matrixdarstellung der Leiteroperatoren ermittelt werden. Man beachte, dass hier alle Indizes von 0 (nicht von 1) bis unendlich laufen. Die Eigenzustände lassen sich als Vektoren darstellen:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad \text{usw.} \quad (99)$$

Die Vollständigkeit dieser Basis liefert eine Darstellung des Einheitsoperators

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1 \quad (100)$$

### 10.6.1 Erzeugungsoperator

Vor und nach dem Erzeugungsoperator wird eine 1 (Einheitsoperator) eingeschoben:

$$a^\dagger = \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle \underbrace{\langle m| a^\dagger |n\rangle}_{a_{mn}^\dagger} \langle n| \quad (101)$$

Das Matrixelement berechnet sich zu

$$a_{mn}^\dagger = \langle m| a^\dagger |n\rangle = \sqrt{n+1} \langle m|n+1\rangle = \sqrt{n+1} \delta_{m,n+1} \quad (102)$$

Der Erzeugungsoperator dargestellt durch die Basisvektoren

$$a^\dagger = \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle \sqrt{n+1} \langle n| \quad (103)$$

Somit ergibt sich die *Matrixdarstellung des Erzeugungsoperators* bzgl. der Besetzungseigenbasis (alle nicht angegebenen Elemente sind gleich 0)

$$a^\dagger = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ \sqrt{1} & 0 & & & \\ & \sqrt{2} & 0 & & \\ & & \sqrt{3} & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \quad (104)$$

### 10.6.2 Vernichtungsoperator

Durch analoge Rechnung erhält man für den Vernichtungsoperator

$$a = \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle \underbrace{\langle m| a |n\rangle}_{a_{mn}} \langle n| = \sum_{m,n=0}^{\infty} |m\rangle \sqrt{n} \delta_{m+1,n} \langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \sqrt{n+1} \langle n+1| \quad (105)$$

Dabei wurde das Matrixelement schon eingesetzt

$$a_{mn} = \langle m| a |n\rangle = \sqrt{n} \langle m|n-1\rangle = \sqrt{n} \delta_{m,n-1} = \sqrt{n} \delta_{m+1,n} \quad (106)$$

*Matrixdarstellung des Vernichtungsoperators* bzgl. der Besetzungseigenbasis

$$a = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1} & & & \\ & 0 & \sqrt{2} & & \\ & & 0 & \sqrt{3} & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (107)$$

Man erkennt, dass die Matrix  $a^\dagger$  genau die transponierte von  $a$  ist. Dies ist verständlich, da die beiden Operatoren zueinander adjungiert (= transponiert + komplex konjugiert) sind.

### 10.6.3 Besetzungszahloperator

Matrixelement des Besetzungszahloperators bzgl. der Besetzungseigenbasis

$$N_{mn} = \langle m | N | n \rangle = n \langle m | n \rangle = n \delta_{m,n} \quad (108)$$

alternativ mit den Leiteroperatoren

$$N_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} a_{mk}^{\dagger} a_{kn} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sqrt{k+1} \delta_{m,k+1}}_{a_{mk}^{\dagger}} \underbrace{\sqrt{n} \delta_{k+1,n}}_{a_{kn}} = n \delta_{m,n} \quad (109)$$

Matrixdarstellung des Besetzungszahloperators bzgl. der Besetzungseigenbasis

$$N = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 2 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (110)$$

### Hamiltonoperator des harmonischen Oszillators

Matrixelement des Hamiltonoperators für den harmonischen Oszillator bzgl. der Besetzungseigenbasis bzw. der Energieeigenbasis

$$H_{mn} = \langle m | H | n \rangle = \langle m | \hbar\omega \left( N + \frac{1}{2} \right) | n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \langle m | n \rangle = \hbar\omega \left( n + \frac{1}{2} \right) \delta_{m,n} \quad (111)$$

Matrixdarstellung des Hamiltonoperators für den harmonischen Oszillator bzgl. der Besetzungseigenbasis bzw. der Energieeigenbasis

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & & & \\ & 1 + \frac{1}{2} & & \\ & & 2 + \frac{1}{2} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \quad (112)$$

Da die Operatoren  $N$  und  $H$  hermitesch sind, folgt dass die zugehörigen Matrizen bzgl. der Eigenbasen symmetrisch sind.

## 10.7 Eigenzustände bosonischer Kletteroperatoren

Die Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind die kohärenten Zustände  $|\alpha\rangle$ . Der Vernichtungsoperator  $a$  erfüllt folgende Eigenwertgleichung

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (113)$$

Der Erzeugungsoperator erfüllt folgende Eigenwertgleichung, mit einem Linkseigenzustand (Bra-Eigenzustand)

$$\langle \alpha | a^{\dagger} = \alpha^* \langle \alpha | \quad (114)$$

Der Vernichtungsoperator  $a$  kann im Gegensatz zum Erzeugungsoperator  $a^{\dagger}$  Rechtseigenzustände (Ket-Eigenzustände) besitzen. Der Erzeugungsoperator erhöht die minimale Teilchenzahl eines Zustandes im Fockraum um eins; der damit entstandene Zustand kann

also nicht der ursprüngliche sein. Dagegen verringert der Vernichtungsoperator die maximale Teilchenzahl um eins; da ein Zustand im Fockraum aber Komponenten aller Teilchenzahlen (auch beliebig hoher Teilchenzahlen) beinhalten kann, ist damit nicht verboten, dass  $a$  Eigenzustände besitzt. Dies sind die kohärenten Zustände.

Der kohärente Zustand  $|\alpha\rangle$  ergibt sich als Linearkombination von allen Zuständen fester Teilchenzahl  $|n\rangle$  nach:

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} |0\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} e^{\alpha a^\dagger} |0\rangle \quad (115)$$

Dabei ist  $\alpha$  eine nichtverschwindende komplexe Zahl, die den kohärenten Zustand vollständig definiert.  $|\alpha|^2$  ist der Erwartungswert der Besetzungszahl des kohärenten Zustandes. Kohärente Zustände haben minimale Unschärfe und bleiben bei Zeitentwicklung kohärent. Mit ihnen lässt sich die elektromagnetische Welle einer Laser-Mode am besten beschreiben.

## 10.8 Literatur

- Cohen-Tannoudji, Diu, Laloe: *Quantenmechanik 1/2*. de Gruyter, Berlin
- Nolting: *Grundkurs theoretische Physik. Bd.5/1 : Quantenmechanik*. Springer, Berlin

## 10.9 Siehe auch

- Fockraum
- Kategorie:Quantenmechanik
- Kategorie:Quantenfeldtheorie

## 10.10 Urheberrecht

- Diese Seite wurde zuletzt am 13. Februar 2010 um 19:38 Uhr geändert.
- Der Text ist unter der Lizenz »Creative Commons Attribution/Share Alike« verfügbar; zusätzliche Bedingungen können anwendbar sein, Einzelheiten sind in den Nutzungsbedingungen beschrieben
- Wikipedia® ist eine eingetragene Marke der Wikimedia Foundation Inc.

## Abbildungsverzeichnis

1	Die Verstärkungsfunktion $\mathcal{G}(z)$ bezüglich Strahlungsintensität, Frequenz und Temperatur. . . . .	22
2	Die Helium-Neon-Laser Strahlungs-Temperatur $T(\nu, \theta)$ für $D = 1$ mm, $\Delta\nu_D = 0.9$ GHz, and $P_0 = 1.0$ mW. . . . .	23
3	Die Helium-Neon-Laser Strahlungs-Temperatur $T(\nu_0, \theta)$ für drei Aperturdurchmesser $D$ . Die Intensitäts/Temperatur Profile werden mit wachsendem $D$ schmaler und der Strahl wird mehr parallel. . . . .	24
4	<a href="#">Lebensdauer angeregter Zustände (aus Leßmann [2000])</a> . . . . .	25

## Tabellenverzeichnis

## Literaturverzeichnis

Die Zahlen am Ende einer Referenz sind die Seitennummern, wo die Referenz verwendet wird.

[tamm97] [http://www.cs.ut.ee/~toomas\\_l/linalg/](http://www.cs.ut.ee/~toomas_l/linalg/)

[melles03] : Siehe "Laser beam measurement [Messungen an Laserstrahlen]". – URL <http://www.mellesgriot.com/products/lasers/> 18

[coherent03] : Siehe "Lasers" bei. – URL <http://www.coherentinc.com/Products/> 18

[Bludman und Kennedy 1997] BLUDMAN, S. A. ; KENNEDY, D. C.: Variational Principles for Stellar Structure [Variationsprinzipien in Sternstrukturen]. In: *Astrophys. J.* 484 (1997), S. 329–340 5, 9

[Christiansen 1996] CHRISTIANSEN, D.: *Electronic Engineer's Handbook [Handbuch des Elektronikingenieurs]*. McGraw-Hill, 1996 21

[Essex und Kennedy 1999] ESSEX, C. ; KENNEDY, D. C.: Minimum Entropy Production of Neutrino Radiation in the Steady State [Minimale Entropie-Produktion der Neutrino-Strahlung bei Stationarität. In: *J. Stat. Phys.* 94 (1999), S. 253–267 4, 5, 13, 14, 19

[Essex u. a. 2003] ESSEX, Christopher ; KENNEDY, Dallas C. ; BERRY, R. S.: How Hot Is Radiation? [Wie heiß ist Strahlung? In: *American Journal of Physics* 71 (2003), Nr. 10, S. 969 – 978. – URL <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0209043v4>. – Version: 2003 1

[Gerlich und Tscheuschner 2009] GERLICH, Gerhard ; TSCHAEUSCHNER, Ralf D.: *Falsification Of The Atmospheric CO<sub>2</sub> Greenhouse Effects Within The Frame Of Physics [Widerlegung des atmosphärischen CO<sub>2</sub> Treibhauseffekts im Rahmen der Physik]*. Internet. 2009. – URL [http://www.arxiv.org/PS\\_cache/arxiv/pdf/0707/0707.1161v4.pdf](http://www.arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0707/0707.1161v4.pdf). – access 08.04.2010 - das Paper eines Skeptikers mit nur wenigen richtigen Angaben. 26

[de Groot und Mazur 1984] GROOT, S. R. de ; MAZUR, P.: *on-Equilibrium Thermodynamics [Nichtgleichgewichtsthermodynamik]*. Dover Publications, 1984 (Chaps. 1, 3–5) 4, 5

- [Höllig 2006] HÖLLIG, Klaus: Die Höldersche Ungleichung. (2006). – URL <http://mo.mathematik.uni-stuttgart.de/inhalt/erlaeuterung/erlaeuterung495/> 26
- [Leßmann 2000] LESSMANN, Torben: *Cavity ringdown Spektroskopie und photoakustische Detektion*. Physikalisch-Chemisches Institut der Universität Heidelberg. 2000. – URL <http://www.pci.uni-heidelberg.de/pci/fpraktikum/ss00/Lessmann.pdf>. – Abruf: 01.06.2007, Version: ,2000 25, 39
- [M. Sargent III und W. E. Lamb 1974] M. SARGENT III, M. O. S. ; W. E. LAMB, Jr.: *Laser Physics [Laserphysik]*. Addison-Wesley, Reading, MA, 1974 (Chaps. 6–8 and 14–17) 4, 6, 11, 12, 17
- [Mandel und Wolf 1995] MANDEL, L. ; WOLF, E.: *Optical Coherence and Quantum Optics [Opzische Kohärenz und Quantenoptik]*. Cambridge University Press, 1995 (Chaps. 10–13, 15, and 18) 4, 11
- [Merzbacher 1969] MERZBACHER, E.: *uantum Mechanics [Quantenmechanik]*. John Wiley & Sons, 1969 (2nd ed., Chaps. 15 and 20–22) 6, 7
- [Mihalas und Weibel-Mihalas 1999] MIHALAS, D. ; WEIBEL-MIHALAS, B.: *Foundations of Radiation Hydrodynamics [Grundlagen der Strahlungshydrodynamik]*. Dover Publications, 1999 (Chap. 6) 9, 13, 15, 20
- [Natanson 1888] NATANSON, Ladislaus: Ueber die Geschwindigkeit, mit welcher Gase den Maxwell'schen Zustand erreichen. In: *Annalen der Physik* 270 (1888), Nr. 8B, S. 970 – 980. – URL <http://dspace.utlib.ee/dspace/bitstream/10062/2985/1/natanson45.pdf> 25
- [Reichl 1998] REICHL, L.: *Modern Course in Statistical Physics [Ein moderner Kursus in statistischer Physik]*. John Wiley & Sons, 1998 (2nd ed., Chaps. 2, 6, and 10, and Appendix B) 4, 5, 7, 8, 10, 11
- [Sieniutycz und Berry 1993] SIENIUTYCZ, S. ; BERRY, R. S.: Canonical formalism, fundamental equation, and generalized thermomechanics for irreversible fluids with heat transfer [Kanonischer Formalismus, Grundgleichung und generalisierte Thermomechanik für irreversible Flüsse mit Wärme-Übertragung]. In: *Phys. Rev.* 47 (1993), S. 1765–1783 5
- [Silfvast 1996] SILFVAST, W. T.: *Laser Fundamentals [Laser-Grundlagen]*. Cambridge University Press, 1996 (Chap. 6 and Parts III, IV, and V) 4, 6, 17, 18
- [Stefan 1879] STEFAN, J.: Über die Beziehung zwischen der Wärmestrahlung und der Temperatur. In: *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften* 79 (1879), S. 391 – 428 3
- [Walls und Milburn 1994] WALLS, D. F. ; MILBURN, G. J.: *Quantum Optics [Quantenoptik]*. Springer-Verlag, 1994 (Chap. 2) 12
- [Wien 1894] WIEN, Willy: Temperatur und Entropie der Strahlung. In: *Annalen der Physik* 288 (1894), Nr. 5, S. 132 – 165. – URL [http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/historic-papers/1894\\_288\\_132-165.pdf](http://www.physik.uni-augsburg.de/annalen/history/historic-papers/1894_288_132-165.pdf) 3
- [...Wikipedia ] ...WIKIPEDIA: *Erzeugungs- und Vernichtungsoperator*. – URL [http://de.wikipedia.org/wiki/Erzeugungs-\\_und\\_Vernichtungsoperator](http://de.wikipedia.org/wiki/Erzeugungs-_und_Vernichtungsoperator) 2, 6, 28