准考證號碼：

國立嘉義女子高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選初試試題卷

科目：**數學科**

時間：**112/6/20(二)19：00~20：30　計 90 分鐘。**

說明：1.本試題卷共有 2 張 2 頁計有兩大題試題。答案請書寫於答案紙(2 張 2 面)。
2.請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。
3.可利用試題卷空白處書寫或計算。
4.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

作答說明：所有的答案請依題號填寫於答案卷上，答案卷請用黑色或藍色原子筆作答，否則不予計分。禁用計算機。試題卷與答案卷共4頁。

參考數值

- $\sqrt{2}\approx 1.414$ ；$\sqrt{3}\approx 1.732$ ；$\sqrt{5}\approx 2.236$ ；$\sqrt{7}\approx 2.646$ ；$\sqrt{11}\approx 3.317$ ；$\sqrt{13}\approx 3.606$
- $log\,2\approx 0.3010$ ；$log\,3\approx 0.4771$；$log\,7\approx 0.8451$；$log\,11\approx 1.0414$ ；$log\,13\approx 1.1139$ ；$log\,17\approx 1.2304$

一、填充題（計16題，每題5分，共80分）：

1. 神童如風參加心算比賽的電視節目錄影，裁判亮出題目，觀眾只理解到題目是求

$$\sqrt[15]{15,\square\square\square,\square\square\square,\square\square\square,\square\square\square,\square\square\square}$$

這個開根號的數時（方框代表觀眾來不及記憶的數字），說時遲，那時快，
如風只花了 15 秒就算出這個複雜的根式是一個正整數 k，並經裁判確認正確。請問正整數 k＝________ 。

2. 設 a 為正數，若方程式 $||2x+a|+x-a|=5$ 恰有三個解，則 a 之值為________。

3. 設雙曲線 Γ：$\dfrac{x^2}{49}-\dfrac{y^2}{240}=1$ 的焦點為 F、F'，中心為 O，若 P 為雙曲線 Γ 上的一動點，則滿足 $\angle FPF'$ 為鈍角且 $\overline{OP}$ 長度為正整數的動點 P 共有________ 種可能性。

4. 設 $A=\begin{bmatrix}2 & 4\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，二階方陣 X、Y 滿足 $X+Y=I$ 且 $XY=O$，其中 $I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$、$O=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。
若存在實數 $a>b$ 使得 $A=aX+bY$，則 a^b 之值為________ 。

5. 小美每天早上起床後必先完成洗臉、刷牙、穿衣服、穿裙子、戴隱形眼鏡和吃早餐等六件事情，其中洗臉後才能戴隱形眼鏡，刷牙和洗臉後才會吃早餐，例如：洗臉→穿衣服→穿裙子→刷牙→戴隱形眼鏡→吃早餐。請問小美完成這六件事情，依前後順序的不同，共有________種方法。

6. 由正整數 1 至 20 等 20 個數字中，甲任意取出兩個相異數 a 與 b 之後，再由乙任意取出另兩個相異數 c 與 d。若每一個數字被取出的機會均等，則在已知 $a+b$ 為偶數的條件下，$c+d$ 為奇數的機率為________。

7. 設 n 為正奇數，黑箱中有 n 枚硬幣，其中 1 枚兩面都是人頭（*Head*），1 枚兩面都是字（*Tail*），其餘的硬幣都是一面人頭和一面字。已知每個硬幣被取出的機會均等，每個硬幣兩面放在手心後朝上的機會也是均等的；將手伸入箱中握住三枚硬幣，取出後將手打開，在此三枚硬幣朝上的面是 2 個人頭和 1 個字的條件下，若此三硬幣的另一面是 1 個人頭和 2 個字的機率為 $\dfrac{4}{7}$，則正奇數 n＝________ 。

8. 設 $A(\alpha)$ 、 $B(\beta)$ 、 $C(\gamma)$ 為複數平面上不共線的三點，都不在實軸上，α、β、γ 皆不為零，若 $\overline{AC}=4$ 且 $\alpha^2+4\beta^2+5\gamma^2=2\gamma(\alpha+4\beta)$，則 $\overline{AB}$＝________ 。

9. 設 $f(x)$ 為三次多項式函數，其圖形通過$(1,2)$、$(5,8)$、$(9,11)$，
則 $\int_1^9 f(x)dx$ 之值為________。

10. 設多項式函數 $y=f(x)$ 滿足 $f(x)=4x^3-12x^2+8x+20-\int_1^x f(t)dt$，
則 $f(x)=$ ________。

11. 設 a,b 為非零實數，若實係數多項式 $y=f(x)$ 的圖形之反曲點為 $(b,5)$ 且 $f'(x)=a(x-1)(x-3)$，則 $\int_0^4 f(x)dx$ 之值為
________。

12. 設 a 為實數，已知兩函數 $f(x)=4x^2-3ax+4\int_0^1 \left(t\cdot f(t)\right)dt$ 與 $g(x)=x^2+4x+a-\int_0^x \left((t+1)\cdot g'(t)\right)dt$。若 $f(x)-x\cdot g(x)=0$ 有兩相異實根 α 與 β，其中 $\alpha<\beta$，則 $\dfrac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta \left(3x^2-2ax+a^2\right)dx$ 之最小值為________。

13. 已知三角形 ABC 的重心為點 G，且 $\overline{GB}=7$，$\overline{GC}=3$，若點 G 至直線 BC 的距離為 2，則 $\overline{GA}$ 之長為________。

14. 已知梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}=5$，$\overline{BC}=10$，且 $\overline{AD}//\overline{BC}$，$\angle ADC=120^\circ$。若梯形 $ABCD$ 有一個內切圓（與四個邊都相切的圓），則梯形 $ABCD$ 的面積為________。

15. 在坐標平面上，設點 O 為原點，圓 $\Gamma:(x-4\sqrt{2})^2+(y-4\sqrt{2})^2=16$ 之圓心為點 C。若點 M 在圓 Γ 上且與平面上另兩點 P 與 Q 滿足以下向量的關係式：

$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{MC}+2\overrightarrow{MQ}=\vec{0}$，則 $\overline{PQ}$ 之長度的最大值為________。

16. 已知一四邊形的紙張 $ABCD$，其中 $\angle A=\angle C=90^\circ$，$\overline{AD}=10$，$\overline{CD}=5$。
沿著 $\overline{BD}$ 摺起平面 ABD，使得點 A 在平面 BCD 的投影點 P 落在 $\overline{BC}$ 上，若摺起後四面體 $ABCD$ 的體積為 20，
則摺起後點 B 到平面 ACD 的距離為________。

二、計算證明題（計2題，每題10分，共20分）：

1. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1=1 \\ 3a_{n+1}=\pi\cdot sin(a_n) \end{cases}, n\in\mathrm{N}$，

(1)請說明 $\langle a_n \rangle$ 是否為有界數列？ (3 分)

(2)請判斷 $\langle a_n \rangle$ 是否為遞增數列或遞減數列？請證明之。(4 分)

(3)求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ ？(3 分)

2. 在坐標平面上，設點 O 為原點，已知橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a>b>0$。若 P,Q 為橢圓 Γ 上任意兩點，
試求 ΔOPQ 面積之最大值。（10 分）

准考證號碼：

國立嘉義女子高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選初試答案卷

科目：**數學科**

時間：**112/6/20(二)19：00~20：30　計 90 分鐘。**

說明：1.本試題卷共有 2 張 2 頁計有兩大題試題。答案請書寫於答案紙(2 張 2 面)。
2.請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。
3.可利用試題卷空白處書寫或計算。
4.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

一、填充題（計16題，每題5分，共80分，全對才計分）：

1	2	3	4
12	$\frac{10}{3}$	36	$\frac{1}{9}$
5	6	7	8
150	$\frac{80}{153}$	11	$2\sqrt{5}$
9	10	11	12
60	$12x^2-48x+56$	20	$\frac{5}{3}$
13	14	15	16
$4\sqrt{6}$ 或 6 （全對才給分）	$30\sqrt{3}$	26	$\frac{8\sqrt{3}}{5}$

_____________彌封線_________彌封線_____________彌封線_____________彌封線_____________彌封線______________

二、計算證明題（計2題，每題10分，共20分）：

題號	作答區
1	$\boxed{\text{答案}}$ (1)是　(2)遞減數列　(3)$\frac{\pi}{6}$ $\boxed{\text{說明}}$ (1)$a_1=1$，$3a_{n+1}=\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow 3a_n=\pi\cdot sin(a_{n-1})\Rightarrow a_n=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_{n-1})\Rightarrow\lvert a_n\rvert=\frac{\pi}{3}\cdot\lvert sin(a_{n-1})\rvert<\frac{\pi}{3}$ 故$\langle a_n\rangle$為有界數列 (2)今以數學歸納法證明$a_{n+1}<a_n$ ① $n=1$時 $a_2=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_1)=\frac{\pi}{3}\cdot sin1<\frac{\pi}{3}\cdot sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi<1=a_1$，$\therefore a_2<a_1$ ② 設$n=k$時，原式成立，即$a_{k+1}<a_k<\frac{\pi}{3}$ 則$n=k+1$時，$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_{k+1})-\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_k)=\frac{\pi}{3}\cdot(sin(a_{k+1})-sin(a_k))<\frac{\pi}{3}\cdot 0$ $\therefore a_{k+2}<a_{k+1}$，即$n=k+1$時成立 ③根據數學歸納法，可以證得$\langle a_n\rangle$為遞減數列 (3)由(1)(2)得知$\langle a_n\rangle$為遞減且有下界的數列，則$\langle a_n\rangle$為收斂數列，故令$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k$ $3a_{n+1}=\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}3a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow 3k=\pi\,sin k\Rightarrow k=\frac{\pi}{6}$
2	Ans: $\frac{1}{2}ab$ Sol: 設 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$ 則 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$ $\triangle OPQ$面積$=\frac{1}{2}\left\lvert\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\rvert=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$ 由柯西不等式 $\left(\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2\right)\left(\left(\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(-\frac{x_2^2}{a}\right)\right)\geq\left(\frac{x_1}{a}\cdot\frac{y_2}{b}+\left(\frac{y_1}{b}\right)\left(-\frac{x_2}{a}\right)\right)^2$ $1\cdot 1\geq\left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{ab}\right)^2$ $ab\geq x_1y_2-x_2y_1\geq -ab$ $\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$ "="成立的條件為 $\frac{\frac{x_1}{a}}{\frac{y_2}{b}}=\frac{\frac{y_1}{b}}{-\frac{x_2}{a}}\Rightarrow b^2x_1x_2+a^2y_1y_2=0$ —— (*) $(x_1,y_1)=(a,0)$, $(x_2,y_2)=(0,b)$ 與 $(x_1,y_1)=(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $(x_2,y_2)=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{1}{2}b)$ 皆為(*)之解. 故$\triangle OPQ$面積$\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$之最大值為$\frac{1}{2}ab$